

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 2.2

Το επίπεδο

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Ο ορισμός του επιπέδου

Στο πρώτο βιβλίο των Στοιχείων το επίπεδο ορίζεται ως είδος επιφανείας, που χαρακτηρίζεται από τη σχέση του προς τις ευθείες που βρίσκονται σε αυτό.

ΟΡΟΙ

- Ἐπιφάνεια δὲ ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
- Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
- Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται

Η ύπαρξη του επιπέδου

Όμως, ενώ ο Ευκλείδης εξασφαλίζει την ύπαρξη της ευθείας μέσω ενός αιτήματος, δεν δίδει κανένα στοιχείο για την ύπαρξη ή την κατασκευή του επιπέδου.

Αυτό οδήγησε διάφορους μαθηματικούς, από την αρχαιότητα μέχρι τον 19ο αιώνα να δώσουν διαφορετικούς ορισμούς και κατασκευές για το επίπεδο.

Τι είναι ένα επίπεδο;

Συζητήστε στις ομάδες σας τις ακόλουθες ερωτήσεις:

- α' Περιγράψτε τι είναι επίπεδο.
- β' Ποιές είναι, κατά τη γνώμη σας, οι διαφορές μεταξύ “επιπέδου” και “επιφάνειας”;
- γ' Πώς θα κατασκευάζατε ένα επίπεδο;

Οι αντιλήψεις για το επίπεδο

Θα εξετάσουμε μία εργασία της Κ.Ζορμπαλά και του Κ.Τζανάκη, στην οποία μελετούν τις διάφορες προσπάθειες ορισμού του επιπέδου στην Ιστορία των Μαθηματικών, και ερευνούν τις σύγχρονες αντιλήψεις ατόμων που δεν έχουν εξειδικευμένη μαθηματική παιδεία.

Οι ορισμοί του Ήρωνα

Ο Ήρων ο Αλεξανδρινός έδωσε μία σειρά ορισμών για να ερμηνεύσει τον ορισμό του Ευκλείδη.

- Όταν μία ευθεία αγγίζει δύο σημεία μίας επίπεδης επιφάνειας, τότε ολόκληρη η ευθεία εφαρμόζει στην επιφάνεια.
- Επίπεδη επιφάνεια είναι η ελάχιστη επιφάνεια όλων των επιφανειών που έχουν τα ίδια πέρατα και της οποίας όλα τα μέρη εφαρμόζουν εκ φύσεως.

Οι ορισμοί του Leibniz

Ο Leibniz (1646 – 1716) ορίζει το επίπεδο ως μία επιφάνεια της οποίας η τομή συμπεριφέρεται παντού με τον ίδιο τρόπο.

Σε άλλο έργο, ο Leibniz ορίζει το επίπεδο ως το σύνολο των σημείων του χώρου που απέχουν εξ ίσου από δύο σημεία, και την ευθεία ως το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τρία σημεία.

Κατασκευές του επιπέδου

Αυτή η προσέγγιση του επιπέδου ως υποσυνόλου του χώρου, χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή του επιπέδου.

Ο Wolfgang Bolyai (1775 – 1856) κατασκευάζει το επίπεδο με την περιστροφή μίας ευθείας γύρω από μία άλλη ευθεία, προς την οποία είναι κάθετος.

Ο Gauss (1777 – 1855) ορίζει το επίπεδο ως μία επιφάνεια στην οποία βρίσκεται κάθε ευθεία που σχηματίζει ορθή γωνία με δοθείσα ευθεία σε δοθέν σημείο.

Η κατασκευή του Janos Bolyai

Ο Janos Bolyai (1802 – 1860) κατασκεύασε το επίπεδο χρησιμοποιώντας την έννοια της συμμετρίας.

Ξεκινώντας από τρία σημεία του χώρου, A , B , C , ορίζει την εικόνα ενός σημείου X ως εξής: περιστρέφει το X γύρω από τις ευθείες AB , AC , BC και λαμβάνει τρεις κύκλους. Αυτοί τέμνονται σε ένα σημείο Y . Τα σημεία του επιπέδου είναι τα σημεία του χώρου για τα οποία το Y συμπίπτει με το X .

Με σύγχρονους όρους, ορίζει το επίπεδο ως το σύνολο των σταθερών σημείων μίας ανάκλασης.

Το κριτήριο του Simson

Ο Robert Simson (1687 – 1768) έδωσε έναν χαρακτηρισμό του επιπέδου παρόμοιο με αυτόν του Ήρωνα.

Επίπεδο είναι μία επιφάνεια που έχει την ιδιότητα ότι η ευθεία που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία της επιφάνειας αυτής, κείται εξ ολοκλήρου πάνω σε αυτήν.

Ο ορισμός του Pieri

Προς το τέλος του 19ου αιώνα, ένας μαθηματικός της σχολής του G.Peano, ο Mario Pieri (1860 – 1913), παρουσίασε μία αξιωματικοποίηση της Γεωμετρίας με πρωταρχικές έννοιες το σημείο, το ευθύγραμμο τμήμα και την κίνηση.

Όρισε το επίπεδο ως εξής:

Θεωρούμε τρία μη συνευθειακά σημεία A , B , C . Το σχήμα που αποτελείται από όλες τις ευθείες που ενώνουν το A με όλα τα σημεία της BC , ή το B με όλα τα σημεία της AC , ή το C με όλα τα σημεία της AB , καλείται επίπεδο.

Η αξιωματικοποίηση του Hilbert

Το 1899, ο Hilbert (1862 – 1943) παρουσίασε τα “Θεμέλια της Γεωμετρίας”, στα οποία δίδει μία τελειοποιημένη, από σύγχρονη μαθηματική άποψη, εκδοχή της αξιωματικοποίησης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Σε αυτήν οι έννοιες “σημείο”, “ευθεία” και “επίπεδο” θεωρούνται πρωταρχικές. Αντί ορισμού, οι ιδιότητές τους δίδονται από τα αξιώματα.

Η αξιωματικοποίηση του Hilbert

Η ύπαρξη αυτών των εννοιών δεν εξασφαλίζεται κατασκευαστικά, αλλά λογικά: το αξιωματικό σύστημα στο οποίο εμφανίζονται δεν περιέχει αντιφάσεις.

Η αντίληψη του Hilbert έγινε δεκτή από την πλειονότητα των μαθηματικών. Αλλά επικράτησε και στην εκπαίδευση, με αποτέλεσμα στα σχολικά και στα πανεπιστημιακά εγχειρίδια να μη δίδεται ορισμός του επιπέδου.

Η έρευνα

Τα ακόλουθα ερωτήματα τέθηκαν σε πτυχιούχους, γυναίκες και άνδρες, σχολών στις οποίες δεν διδάσκονται μαθηματικά σε προπτυχιακό επίπεδο.

- α. Περιγράψτε τι είναι επίπεδο.
- β. Ποιές είναι, κατά τη γνώμη σας, οι διαφορές μεταξύ “επιπέδου” και “επιφάνειας”;
- γ. Κατασκευάστε ένα επίπεδο.

Περιγράψτε τι είναι επίπεδο

Στην ερώτηση “Περιγράψτε τι είναι επίπεδο” δόθηκαν 63 απαντήσεις, από 51 άτομα.

α'	Επιφάνεια στην οποία εφαρμόζει ακριβώς μία ευθεία (Ήρωνας)	15,9%
β'	Επιφάνεια που περιέχει ολόκληρη την ευθεία από δύο σημεία της (Simson)	4,8%
γ'	Επιφάνεια που ορίζεται από τρία σημεία και τις ευθείες που τα ενώνουν (Pieri, αξίωμα Hilbert)	12,7%
δ'	Σύνολο σημείων που ισαπέχουν από δύο δοθέντα σημεία (Leibniz)	1,6%

Περιγράψτε τι είναι επίπεδο

ε'	Ομαλή, ευθεία επιφάνεια	12,7%
ς'	Περιγραφή με φυσικές καταστάσεις (π.χ. επιφάνεια νερού)	6,3%
ζ'	Ασαφείς, λογικά κυκλικές, ελλειπείς απαντήσεις	17,4%
η'	Λανθασμένες απαντήσεις	15,9%
θ'	Ιδιόρρυθμες απαντήσεις	7,9%
ι'	Απουσία απάντησης	4,8%

Διαφορές μεταξύ “επιπέδου” και “επιφάνειας”

Στην ερώτηση “Ποιές είναι, κατά τη γνώμη σας, οι διαφορές μεταξύ “επιπέδου” και “επιφάνειας”;” δόθηκαν 58 απαντήσεις, από 51 άτομα.

Στις απαντήσεις εμφανίζεται σύγχυση με καθημερινές χρήσεις του όρου επιφάνεια, όπως εμβαδόν, ή παράπλευρη επιφάνεια στερεού.

α'	Επιφάνεια είναι γενικότερη έννοια από το επίπεδο	22,4%
β'	Το επίπεδο είναι επιφάνεια που ικανοποιεί την ιδιότητα (Simson)	6,7%
γ'	Επιφάνεια είναι σύνορο τρισδιάστατου σώματος	24,1%

Διαφορές μεταξύ “επιπέδου” και “επιφάνειας”

δ'	Το επίπεδο είναι στερεό σώμα, η επιφάνεια είναι έδρα του επίπεδου σώματος	17,2%
ε'	Ασαφείς ή εσφαλμένες απαντήσεις	25,8%
ς'	Απουσία απάντησης	3,4%

Κατασκευή επιπέδου

Για την κατασκευή ενός επιπέδου δόθηκαν 56 απαντήσεις, από 51 άτομα.

α'	Σχεδίαση ευθύγραμμου σχήματος, με ή χωρίς σχόλια για προέκταση	14,3%
β'	Κατασκευή με τρία σημεία (Ήρωνας, Hilbert)	10,7%
γ'	Κατασκευή με δύο τεμνόμενες ευθείες	5,4%
δ'	Κατασκευή με μία ευθεία και ένα σημείο	1,8%

Κατασκευή επιπέδου

ε'	Ιδιόρρυθμες κατασκευές	10,7%
ς'	Η κατασκευή είναι αδύνατη	1,8%
ζ'	Ασαφείς, λογικά κυκλικές ή εσφαλμένες απαντήσεις	28,6%
η'	Απουσία απάντησης	21,4%

Συμπεράσματα έρευνας

Οι Ζορμπαλά και Τζανάκης καταλήγουν στα ακόλουθα συμπεράσματα:

Η ιστορική ανάλυση έδειξε ότι η αντίληψη του Hilbert που θεωρεί το επίπεδο ως πρωταρχική έννοια, είναι προϊόν μίας μακρόχρονης σειράς προσπαθειών λεπτομερούς περιγραφής και κατανόησης της έννοιας αυτής.

Από διδακτικής πλευράς δεν είναι προφανές ότι μπορεί να τεθεί ως αφετηρία στη διδασκαλία της γεωμετρίας.

Συμπεράσματα έρευνας

Ενδεχομένως οι πολλές λανθασμένες απόψεις που διατυπώθηκαν στο πλαίσιο της έρευνας να σχετίζονται [με την απουσία από τη σχολική μαθηματική παιδεία] οποιασδήποτε προσπάθειας λεπτομερούς επεξεργασίας των βασικών χαρακτηριστικών ιδιοτήτων του επιπέδου.

Μπορεί η προσέγγιση της έννοιας από τον Hilbert να έλυσε πολλά μαθηματικά προβλήματα, ενδέχεται όμως να δημιούργησε ένα καινούργιο πρόβλημα διδακτικής και οντολογικής υφής: την αδυναμία βαθιάς κατανόησης της έννοιας του επιπέδου.

Βιβλιογραφία

Κ.Ζορμπαλά, Κ.Τζανάκης. Η έννοια του επιπέδου στην Γεωμετρία: Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης ενσωματωμένα σε σύγχρονες αντιλήψεις. Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, Ρέθυμνο 2003.