

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 1.6

Αναπαραστάσεις

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Αναπαραστάσεις

Σε κάθε τομέα της γνώσης χρησιμοποιούνται **αναπαραστάσεις** των αντικειμένων της γνώσης, είτε για την επικοινωνία με άλλα άτομα είτε για την επεξεργασία της γνώσης.

Ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της μαθηματικής γνώσης είναι ότι οι αναπαραστάσεις αποτελούν το μοναδικό μέσο επεξεργασίας των μαθηματικών αντικειμένων.

Σε αντίθεση προς τη Φυσική ή τη Βιολογία, δεν είναι δυνατόν να επεξεργαστούμε τα ίδια τα αντικείμενα των Μαθηματικών. Για να τα μελετήσουμε πρέπει να τα αναπαραστήσουμε, είτε νοερά, στο μυαλό μας, είτε συμβολικά, με αντικείμενα και ενέργειες στον εξωτερικό χώρο.

Νοητικές και συμβολικές αναπαραστάσεις

Ο Dreyfus διακρίνει τις αναπαραστάσεις σε νοητικές και συμβολικές.

Μία **συμβολική** αναπαράσταση εμφανίζεται εξωτερικά: γράφοντας, σχεδιάζοντας ή μιλώντας.

Μία **νοητική** αναπαράσταση αναφέρεται σε εσωτερικά σχήματα ή πλαίσια αναφοράς, τα οποία χρησιμοποιεί το άτομο για να αλληλεπιδράσει με τον εξωτερικό κόσμο.

Για την κατανόηση των Μαθηματικών και την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων ένα άτομο πρέπει να έχει στη διάθεσή του πολλές αναπαραστάσεις νοητικές ή συμβολικές ενός αντικειμένου.

Εναλλαγή αναπαραστάσεων

Η μελέτη κάθε βήματος στην επίλυση ενός προβλήματος μπορεί να είναι πιο αποτελεσματική σε μία μορφή αναπαράστασης απ' ότι σε μία άλλη. Γι' αυτό το άτομο πρέπει να έχει τη δυνατότητα εναλλαγής από μία αναπαράσταση σε μία άλλη.

Για παράδειγμα, στη Γεωμετρία, εναλλαγή από τη λεκτική περιγραφή ενός γεωμετρικού σχήματος, στο σχέδιο του σχήματος ή σε αλγεβρικό υπολογισμό.

Στη μελέτη συναρτήσεων, από τη συμβολική στη γραφική αναπαράσταση.

Εναλλαγή αναπαραστάσεων

Η διδασκαλία και η μάθηση αυτής της διαδικασίας εναλλαγής αναπαραστάσεων δεν είναι εύκολη. Πρόκειται για μία πολύπλοκη δομή. Συχνά οι μαθήτριες περιορίζονται σε μία μόνο αναπαράσταση, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να λύσουν κάποιο πρόβλημα.

Από διδακτική άποψη, προτείνεται η συστηματική χρήση διαφόρων αναπαραστάσεων στη διδασκαλία, με ρητή αναφορά και έμφαση από την αρχή στην εναλλαγή των αναπαραστάσεων.

Η θεωρία του Duval

Ο Duval προχώρησε σε μία πιο αναλυτική διάκριση των αναπαραστάσεων, με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη Γεωμετρία. Αρχικά τις διακρίνει σε σημειωτικές και μη σημειωτικές.

- Οι **σημειωτικές** αναπαραστάσεις είναι αυτές που δημιουργούνται σκόπιμα, χρησιμοποιώντας ένα σημειωτικό σύστημα: προτάσεις, γραφικές παραστάσεις, σχέδια, κλπ. Αυτές μπορεί να είναι είτε εξωτερικές είτε νοητικές.
- Οι μη σημειωτικές αναπαραστάσεις παράγονται αιτιολογικά και αυτόματα, από ένα οργανικό σύστημα (οπτικές εικόνες μνήμης ή ονείρου) ή από ένα φυσικό μηχανισμό (φωτογραφίες κλπ.).

Αυτές που έχουν καθοριστικό ρόλο για τη γνωστική ανάλυση δυσκολιών στην κατανόηση των Μαθηματικών είναι οι σημειωτικές αναπαραστάσεις.

Σημειωτικές αναπαραστάσεις

Όπως παρατηρήσαμε, οι σημειωτικές αναπαραστάσεις είναι απολύτως απαραίτητες για τη μελέτη των μαθηματικών αντικειμένων, τα οποία δεν έχουν φυσική ύπαρξη.

Γι' αυτό τα Μαθηματικά ανέπτυξαν μεγάλη ποικιλία συστημάτων αναπαραστάσεων, που δεν βρίσκουμε σε άλλες επιστήμες.

Ο Duval πρότεινε την ταξινόμηση των σημειωτικών αναπαραστάσεων σε μονολειτουργικές ή πολυλειτουργικές και σε διαλογικές (discursive) ή μή διαλογικές (non-discursive).

Σημειωτικές αναπαραστάσεις

Ένα σύστημα αναπαραστάσεων μπορεί να είναι μονολειτουργικό ή πολυλειτουργικό.

- **Πολυλειτουργικό** είναι ένα σύστημα που μπορεί να εξυπηρετήσει διαφορετικές λειτουργίες: επικοινωνία, επεξεργασία, εικονογράφηση, προσομοίωση. Παραδείγματα πολυλειτουργικών συστημάτων είναι η φυσική γλώσσα ή τα γεωμετρικά σχέδια.
- **Μονολειτουργικό** είναι ένα σύστημα που μπορεί να εξυπηρετήσει μόνο μια λειτουργία, όπως τα συμβολικά συστήματα ή τα γραφήματα.

Σημειωτικές αναπαραστάσεις

Ένα σύστημα απεικονίσεων μπορεί να είναι διαλογικό, δηλαδή να χρησιμοποιεί μία γλώσσα (discursive), ή να είναι μή διαλογικό, δηλαδή να μη χρησιμοποιεί μία γλώσσα (non-discursive).

- Οι **διαλογικές** αναπαραστάσεις, που χρησιμοποιούν μία γλώσσα, επιτρέπουν τον προσδιορισμό αντικειμένων, τη διατύπωση ιδιοτήτων ή σχέσεων και την εξαγωγή πληροφοριών ή συμπερασμάτων. Χαρακτηρίζονται από τη γραμμική συντακτική διάταξη. Εκτός από τη φυσική γλώσσα, τέτοια συστήματα αναπαραστάσεων είναι τα συστήματα συμβολισμού: αριθμητικά, αλγεβρικά, τυπικές γλώσσες.
- Οι **μή διαλογικές** αναπαραστάσεις, που δεν χρησιμοποιούν γλώσσα, χαρακτηρίζονται από μία σχεδόν άμεση, συνοπτική αντίληψη και την απουσία συντακτικών δεσμεύσεων διάταξης. Τέτοια συστήματα είναι τα γεωμετρικά σχέδια, τα διαγράμματα, τα γραφήματα.

Σημειωτικές αναπαραστάσεις

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο διακρίσεις, έχουμε τέσσερα είδη **πεδίων** (registers) σημειωτικών αναπαραστάσεων.

Πεδία	Διαλογικά	Μή διαλογικά
Πολυλειτουργικά	Φυσική γλώσσα	Γεωμετρικά Σχέδια
Μονολειτουργικά	Συμβολικά συστήματα, Τυπικές γλώσσες	Διαγράμματα, Γραφήματα

Μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων

Η μαθηματική δραστηριότητα για τη μελέτη μαθηματικών αντικειμένων και την επίλυση προβλημάτων έγκειται στο μετασχηματισμό αναπαραστάσεων.

Διακρίνουμε δύο είδη μετασχηματισμών, την *επεξεργασία* μίας αναπαράστασης σε ένα πεδίο και τη *μετατροπή* μίας αναπράστασης από ένα πεδίο σε ένα άλλο.

Μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων

- Η **επεξεργασία** μίας αναπαράστασης γίνεται παραμένοντας στο ίδιο πεδίο: επιχειρηματολογία, αριθμητικοί ή αλγεβρικοί υπολογισμοί, κλπ.

Οι επεξεργασίες σε μονολειτουργικά συστήματα μπορούν να εκφραστούν με έναν αλγόριθμο.

Αντιθέτως, οι επεξεργασίες σε πολυλειτουργικά συστήματα δεν μπορούν να εκφραστούν αλγοριθμικά: η επιχειρηματολογία σε φυσική γλώσσα ή η παρατήρηση ενός σχεδίου δεν εκφράζονται αλγοριθμικά.

Αυτός είναι ένας λόγος της δυσκολίας της διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας.

Μετασχηματισμοί αναπαραστάσεων

- Η **μετατροπή** μίας αναπαράστασης ενός αντικειμένου ή μίας κατάστασης που δημιουργήθηκε σε ένα πεδίο, την μετατρέπει σε μία αναπαράσταση του *ιδίου* αντικειμένου ή κατάστασης σε ένα άλλο πεδίο.

Η μετατροπή είναι γνωστικά σύνθετη πράξη. Μπορεί να είναι δύσκολο να βρεθούν οι αντιστοιχίες ανάμεσα στα δύο περιεχόμενα.

Για να γίνει αυτό, απαιτείται ο συντονισμός των δύο πεδίων μέσα στο άτομο.

Μετατροπή πεδίου

Από μαθηματική άποψη, η μετατροπή γίνεται μόνο για λόγους οικονομίας ή υποστήριξης των επεξεργασιών που γίνονται σε ένα άλλο πεδίο. Η μετατροπή δεν παρεμβαίνει στη μαθηματική επιχειρηματολογία ή στην απόδειξη, γιατί αυτές γίνονται μέσω επεξεργασίας σε ένα πεδίο που χρησιμοποιεί τη γλώσσα.

Από γνωστική άποψη όμως η μετατροπή φαίνεται να είναι ο θεμελιώδης μετασχηματισμός, ο οποίος οδηγεί στην κατανόηση.

Αυτή η διαφορά μεταξύ της μαθηματικής και της γνωστικής άποψης συχνά αγνοείται κατά τη διδασκαλία.

Επεξεργασία

Οι επεξεργασίες εξαρτώνται από το πεδίο:

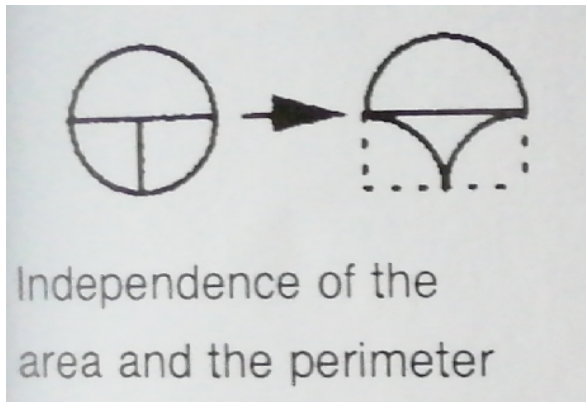
Για παράδειγμα, στην πρόσθεση δύο αριθμών, η χρήση του συμβολισμού των δεκαδικών συνεπάγεται διαφορετικό αλγόριθμο απ' ότι η χρήση κλασμάτων.

$$0,2 + 0,25 = 0,20 + 0,25 = 0,45$$

$$1/5 + 1/4 = 4/20 + 5/20 = 9/20$$

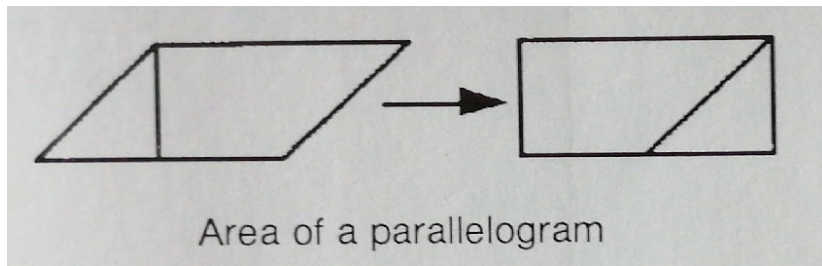
Επεξεργασία γεωμετρικού σχεδίου

Μετασχηματισμοί ενός σχεδίου στη στοιχειώδη γεωμετρία



Επεξεργασία γεωμετρικού σχεδίου

Μετασχηματισμοί ενός σχεδίου στη στοιχειώδη γεωμετρία



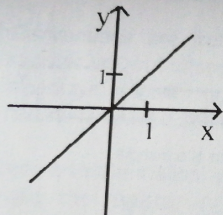
Μετατροπή πεδίου

Οι μετατροπές δεν μπορούν να αναχθούν πάντα σε διαδικασίες.

Για παράδειγμα,

- Η εύρεση του γραφήματος μίας συνάρτησης όταν γνωρίζουμε τον τύπο, είναι μία διαδικασία.
- Αλλά η αντίστροφη μετατροπή, η εύρεση του τύπου όταν γνωρίζουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν είναι διαδικαστική.

Μετατροπή πεδίου

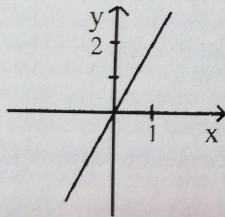


→
recognition

$$y = x$$

Students aged 15-16
after a lesson on
linear functions

60%



→

$$y = 2x$$

25%

Μετατροπή πεδίου

Το περιεχόμενο μίας αναπαράστασης εξαρτάται περισσότερο από το πεδίο παρά από το αντικείμενο.

Αλλά στα Μαθηματικά, επειδή τα αντικείμενα είναι προσιτά μόνο μέσω των αναπαραστάσεων, ένα άτομο μπορεί να συγχέει το αντικείμενο με την αναπαράσταση.

Αυτό δυσκολεύει την αλλαγή πεδίου και περιορίζει το άτομο σε αποσπασματική κατανόηση, μέσα σε ένα μόνο πεδίο.

Δυσκολία κατανόησης

Ο Duval διακρίνει δύο αιτίες που αυξάνουν τη δυσκολία κατανόησης σε όλα τα πεδία.

- Όταν μία επεξεργασία πρέπει να γίνει σε ένα πολυλειτουργικό πεδίο.
- Όταν οι αναπαραστάσεις πρέπει να μετατραπούν σε αναπαραστάσεις σε ένα άλλο πεδίο, με τις οποίες δεν βρίσκονται σε προφανή αντιστοιχία.

Δυσκολία κατανόησης

Η πρώτη οδηγεί στην αποφυγή των πολυλειτουργικών πεδίων και στην επιμονή, όσο είναι δυνατόν, σε μονολειτουργικά πεδία, στα οποία οι επεξεργασίες μπορούν να εκφραστούν αλγοριθμικά.

Η δεύτερη συνήθως αγνοείται, καθώς οι δυσκολίες μετατροπής αποδίδονται σε έλλειψη κατανόησης των εννοιών.

Δυσκολία επεξεργασίας στη Γεωμετρία

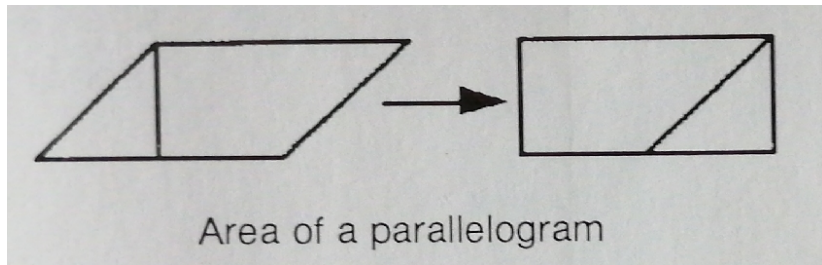
Η Γεωμετρία είναι το κατ' εξοχήν πεδίο στα σχολικά μαθηματικά, στο οποίο οι επεξεργασίες γίνονται σε πολυλειτουργικά πεδία: στη φυσική γλώσσα και σε γεωμετρικά σχήματα.

Πώς επιλέγουμε τον τρόπο να δούμε ένα γεωμετρικό σχέδιο για να το αξιοποιήσουμε ευρετικά;

Επεξεργασία γεωμετρικού σχεδίου

Στην περίπτωση του παραλληλογράμμου: Στο αρχικό και στο τελικό σχέδιο, επικεντρωνόμαστε στα διδιάστατα αντικείμενα —το εμβαδόν.

Αλλά η ενδιαμέση επεξεργασία αφορά ιδιότητες των μονοδιάστατων στοιχείων του σχήματος: τις πλευρές του παραλληλογράμμου και την κάθετο από μία κορυφή.



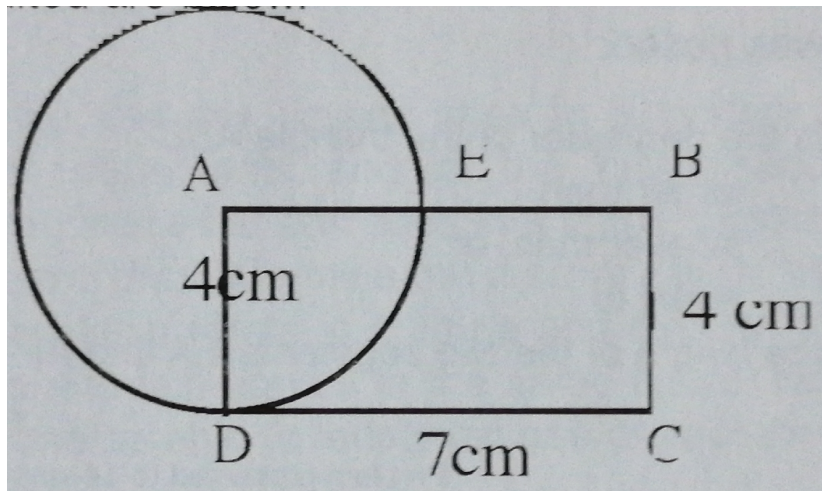
Ορθογώνιο και κύκλος

Το ακόλουθο πρόβλημα δόθηκε στη Γαλλία σε μαθήτριες που αρχίζανε την 1η Γυμνασίου.

Στο κατά προσέγγιση σχέδιο παρουσιάζονται το ορθογώνιο $ABCD$ και το κύκλος με κέντρο A που διέρχεται από το D . (Στο σχέδιο αναγράφονται τα πραγματικά μήκη).

Βρείτε το μήκος του BD .

Ορθογώνιο και κύκλος



Ορθογώνιο και κύκλος

Στο κατά προσέγγιση σχήμα, το EB δεν εμφανίζεται στη σωστή κλίμακα σε σχέση με το AE .

Σε δύο εξετάσεις δόθηκε το ίδιο πρόβλημα, αλλά με διαφορετικό σχήμα: στην α το μήκος EB ήταν περίπου 2cm, ενώ στη β ήταν 3,5cm.

Ορθογώνιο και κύκλος

Καταγράφηκαν οι ακόλουθες απαντήσεις.

	α	β
Μαθηματικές απαντήσεις	9%	22%
Μέτρηση στο σχήμα	16%	40%
Οπτική προσέγγιση	26%	
Άλλες απαντήσεις	30%	24%
Καμία απάντηση	16%	

Ορθογώνιο και κύκλος

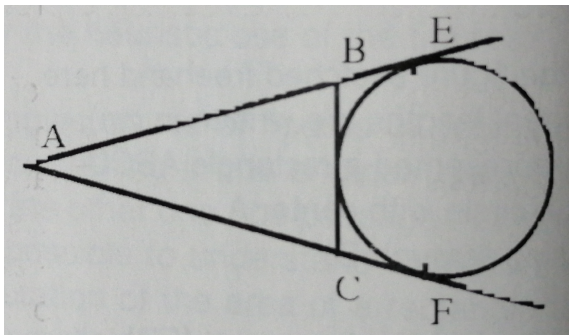
Για να απαντήσουν στο πρόβλημα πρέπει να επικεντρώσουν στα δύο τμήματα του σχήματος.

Αλλά αυτό καλύπτεται από την προφανή επικέντρωση στα σχήματα του ορθογωνίου και του κύκλου.

Παρεγγεγραμμένος κύκλος

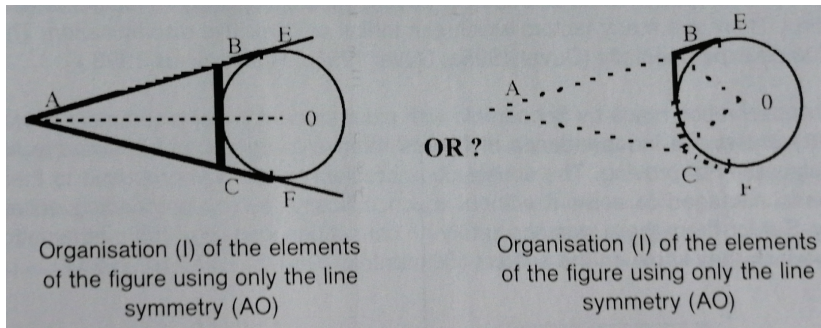
Μία άλλη μελέτη, με μαθήτριες 14 ετών.

Είναι η περίμετρος του τριγώνου ABC μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη από το μήκος των EA και AF ;



Παρεγγεγραμμένος κύκλος

Εδώ το πρόβλημα είναι ότι ο άξονας συμμετρίας κατά μήκος της διχοτόμου κυριαρχεί στο σχέδιο, και εμποδίζει να δούμε τους άλλους δύο άξονες συμμετρίας που χρειάζονται για την επίλυση.



Παρεγγεγραμμένος κύκλος

Περισσότερες από τις μισές μαθήτριες δεν πέρασαν από την οπτική I στην οπτική II. Για να το κάνουν αυτό θα έπρεπε να χωρίσουν τη BC σε δύο τμήματα BI και IC .

Όταν προστέθηκε η υπόδειξη να συγκρίνουν τα BI και IC , το ποσοστό επιτυχίας αυξήθηκε.

Το πρόβλημα με τη Γεωμετρία

Τι δείχνουν αυτά, και άλλα παρόμοια αποτελέσματα;

Οφείλεται η αποτυχία σε έλλειψη κατανόησης των μαθηματικών εννοιών;

Ο Duval υποστηρίζει ότι τα σχήματα εμφανίζονται σε ένα σύστημα αναπαράστασης, και είναι ανεξάρτητα από τις μαθηματικές ιδιότητες.

Αυτό που βλέπουμε καθορίζεται από παράγοντες οπτικής οργάνωσης, που οδηγούν στην αναγνώριση κάποιων μορφών σχημάτων και αποτρέπουν την αναγνώριση άλλων μορφών στο σχέδιο.

Το πρόβλημα με τη Γεωμετρία

Περνώντας στη δυσκολία μετατροπής αναπαραστάσεων από ένα πεδίο σε ένα άλλο, παρατηρούμε δύο αιτίες για αυτές:

- Τη μεταβλητότητα του χαρακτήρα της μετατροπής
- Τη διεύθυνση της μετατροπής.

Οι περισσότερες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθήτριες και οι μαθητές όλων των ηλικιών, πηγάζουν από αυτές.

Βιβλιογραφία

Dreyfus. Advanced Mathematical Thinking Processes. In David Tall (Ed) Advanced Mathematical Thinking. 1991, Kluwer Academic Publishers.

Duval. The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of Mathematics. Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1, 2002.

Duval. Γλώσσα(ες) και αναπαράσταση(εις) στη διδασκαλία των μαθηματικών: δύο και μια τρίτη πρακτικές. Πρακτικά 3ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών, Ρέθυμνο, 2003.

Duval. A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 2006.