

Η Διδακτική της Γεωμετρίας

Διάλεξη 1.5

Ορισμός στα Μαθηματικά

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Τυπικά Μαθηματικά

Τα τυπικά Μαθηματικά οικοδομούνται με προσεκτικά διατυπωμένα αξιώματα και ορισμούς ως αρχικά σημεία, από τα οποία διατυπώνονται και αποδεικνύονται θεωρήματα.

Αυτά τα αρχικά σημεία είναι κατάλληλα επιλεγμένα για την ανάπτυξη ενός παραγωγικού συστήματος: Ενός συστήματος προτάσεων βασισμένων στην εξαγωγή συμπερασμάτων από τα αξιώματα, σύμφωνα με τους κανόνες της Λογικής.

Το παραγωγικό σύστημα μπορεί να είναι τοπικό, για κάποιες συγκεκριμένες έννοιες, ή συνολικό για μία θεωρία.

Ορισμοί στα τυπικά Μαθηματικά

Στην καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε χωρίς δυσκολία έννοιες για τις οποίες δεν έχουμε δώσει έναν τυπικό ορισμό. Αυτές μπορεί να είναι συγκεκριμένες έννοιες, όπως “τραπέζι”, “καρέκλα”, ή αφηρημένες έννοιες, όπως “ευτυχία”, “ειρήνη”.

Στα τυπικά μαθηματικά, για να λειτουργήσει η παραγωγική μέθοδος, χρειάζεται κάθε έννοια να είναι προσδιορισμένη με απόλυτη σαφήνεια, και κατά το δυνατόν χωρίς περιττά στοιχεία.

Εννοιακή εικόνα

Για να εξετάσουμε τον ιδιαίτερο ρόλο των ορισμών στα Μαθηματικά είναι χρήσιμη η διάκριση μεταξύ δύο γνωστικών δομών που σχετίζονται με μία έννοια.

Ονομάζουμε **εννοιακή εικόνα** (concept image, ή εικόνα της έννοιας) τη συνολική γνωστική δομή που συνδέεται με μία έννοια, και περιλαμβάνει όλες τις νοερές εικόνες, τις σχετικές ιδιότητες, τις διαδικασίες στις οποίες εμπλέκεται η έννοια.

Εννοιακή εικόνα

Για παράδειγμα, η εννοιακή εικόνα της έννοιας “τρίγωνο” περιλαμβάνει παραδείγματα τριγώνων που έχει συναντήσει το άτομο, ιδιότητες των τριγώνων που γνωρίζει, διακρίσεις των τριγώνων σε διαφορετικά είδη, ορισμούς της έννοιας που μπορεί να γνωρίζει, ή απλώς να έχει αποστηθίσει, κλπ.

- Ορθογώνιο τρίγωνο, ή ισόπλευρο, ή ισοσκελές τρίγωνο.
- Τα “τρίγωνα με στραβές γραμμές” του Bud.
- Σφαιρικό τρίγωνο.
- Καμπυλόγραμμο τρίγωνο.
- Το εμπορικό τρίγωνο στο κέντρο της Αθήνας.

Εξέλιξη εννοιακής εικόνας

Η εννοιακή εικόνα κατασκευάζεται στο μυαλό κάθε ατόμου μέσα από διαφορετικές εμπειρίες και κατά τη διάρκεια των χρόνων τροποποιείται και ωριμάζει, καθώς το άτομο έρχεται σε επαφή με νέα ερεθίσματα.

Καθώς αναπτύσσεται η εννοιακή εικόνα δεν είναι απαραίτητα λογικά συνεπής.

Μπορεί να περιέχει αντιφατικά στοιχεία, τα οποία όμως δεν γίνονται αντιληπτά από το άτομο εάν δεν έρθουν ταυτόχρονα στην προσοχή του εγκεφάλου.

Εννοιακός ορισμός

Η δεύτερη δομή που θα διακρίνουμε είναι ο ορισμός της έννοιας.

Ονομάζουμε **εννοιακό ορισμό** (concept definition, ή ορισμός της έννοιας) τις φράσεις που χρησιμοποιούμε για να προσδιορίσουμε την έννοια.

Ένα άτομο μπορεί να έχει αποστηθίσει έναν ορισμό, ή να το έχει κατανοήσει και συνδέσει σε μικρότερο ή μεγαλύτερο βαθμό με τα χαρακτηριστικά της έννοιας.

Εννοιακός ορισμός

Ένας **τυπικός εννοιακός ορισμός** είναι ένας ορισμός της έννοιας που είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα.

Ένα άτομο μπορεί να έχει επίσης προσωπικούς εννοιακούς ορισμούς, που διαφέρουν από τον τυπικό ορισμό.

Ο εννοιακός ορισμός, εάν υπάρχει, αποτελεί μέρος της εννοιακής εικόνας, το οποίο μπορεί να συνδέεται ή να μη συνδέεται λογικά με άλλα στοιχεία της εννοιακής εικόνας.

Ορισμοί στα Μαθηματικά

Δύο χαρακτηριστικά των ορισμών στα Μαθηματικά:

- Επιδιώκουμε να χρησιμοποιήσουμε τα ελάχιστα στοιχεία που χαρακτηρίζουν ένα μαθηματικό αντικείμενο, ώστε να είναι ευκολότερη η χρήση τους στην αποδεικτική διαδικασία.
- Η επιλογή των στοιχείων που χρησιμοποιούνται σε έναν ορισμό είναι αυθαίρετη, αφού μπορούμε να βρούμε πολλούς εναλλακτικούς (λογικά ισοδύναμους) ορισμούς για το ίδιο αντικείμενο.

Παράδειγμα: Πολλοί διαφορετικοί αλλά ισοδύναμοι τρόποι να ορίσουμε ένα παραλληλόγραμμο.

Ορισμοί στα Μαθηματικά

Αυτό συνήθως δεν γίνεται αντιληπτό από τις μαθήτριες, συχνά ούτε απότα άτομα που διδάσκουν, καθώς η εμπειρία τους είναι ότι οι ορισμοί παρουσιάζονται ολοκληρωμένοι, χωρίς συζήτηση για τις συγκεκριμένες επιλογές.

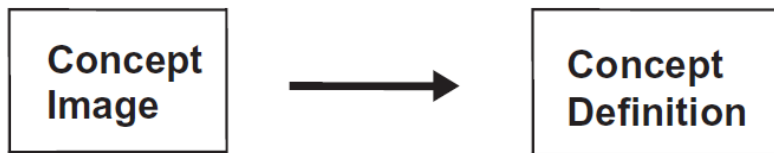
Για να ενισχυθεί η κατανόηση των γεωμετρικών ορισμών και των εννοιών στις οποίες αναφέρονται, είναι απαραίτητο να εμπλακούν οι μαθήτριες με κάποιο τρόπο στη διαδικασία του ορισμού γεωμετρικών αντικειμένων.

Για να το πετύχουν αυτό χρειάζεται διδακτική καθοδήγηση σε ορισμένα παραδείγματα.

Είδη ορισμών

Ο De Villiers διακρίνει τους ορισμούς σε περιγραφικούς ή a posteriori και σε κατασκευαστικούς ή a priori.

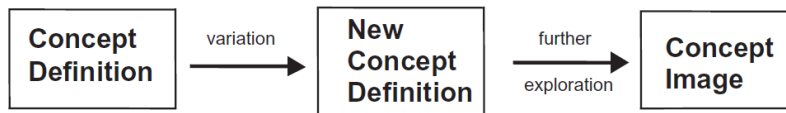
Περιγραφικό ορισμό ονομάζουμε τον ορισμό ενός αντικειμένου του οποίου οι ιδιότητες είναι ήδη γνωστές πριν δημιουργήσουμε τον ορισμό.



Ο περιγραφικός ορισμός δημιουργείται επιλέγοντας κάποιες κατάλληλες ιδιότητες της έννοιας, από τις οποίες όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες παράγονται λογικά.

Είδη ορισμών

Κατασκευαστικό ορισμό ονομάζουμε τον ορισμό που προκύπτει αλλάζοντας έναν δεδομένο ορισμό, μέσα από την παράλειψη, γενίκευση, εξειδίκευση, αντικατάσταση ή προσθήκη κάποιων ιδιοτήτων.



Ένα νέο αντικείμενο δημιουργείται από τον ορισμό, και οι περαιτέρω ιδιότητές του μπορούν να μελετηθούν, λογικά ή πειραματικά.

Εννοιακή εικόνα και διδασκαλία

Ας δούμε κάποιες διαπιστώσεις που προκύπτουν από τη θεωρία εννοιακής εικόνας – εννοιακού ορισμού, σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών, και ειδικότερα της Γεωμετρίας.

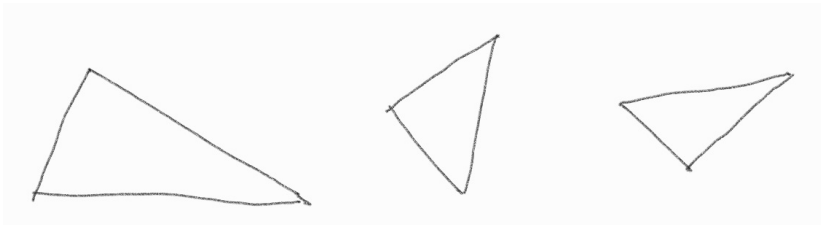
Υποθέτουμε ότι η δασκάλα δίδει τον ορισμό ορθογωνίου τριγώνου αλλά, όπως συμβαίνει συχνά, τα ορθογώνια τρίγωνα που σχεδιάζει στον πίνακα, και όλα τα σχήματα στο βιβλίο, δείχνουν ορθογώνια τρίγωνα με μία από τις κάθετες πλευρές οριζόντια.

Έτσι, ενώ ο εννοιακός ορισμός που μαθαίνουν τα παιδιά δεν θέτει αυτόν τον περιορισμό, η εννοιακή εικόνα περιέχει μόνο παραδείγματα με μία κάθετη πλευρά οριζόντια.

Εννοιακή εικόνα και διδασκαλία

Τί μπορεί να συμβεί;

- Η εννοιακή εικόνα να τροποποιηθεί, ώστε να περιλάβει και τρίγωνα με κάθετες πλευρές σε διαφορετικές κλίσεις.

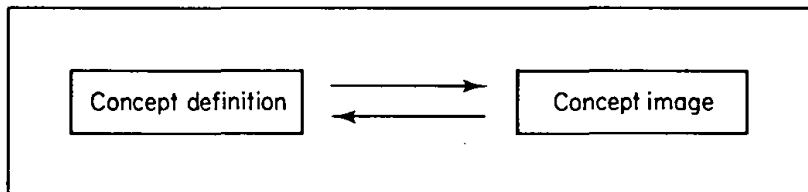


Εννοιακή εικόνα και διδασκαλία

- Η εννοιακή εικόνα να μην τροποποιηθεί. Ο εννοιακός ορισμός που έδωσε η δασκάλα διατηρείται για κάποιο διάστημα, αλλά σταδιακά θα λησμονηθεί.
- Ούτε η εννοιακή εικόνα, ούτε ο εννοιακός ορισμός τροποποιούνται. Η μαθήτρια μπορεί να επαναλάβει τον ορισμό, αλλά αναγνωρίζει ως ορθογώνια μόνο τρίγωνα με μια από τις κάθετες πλευρές οριζόντια.

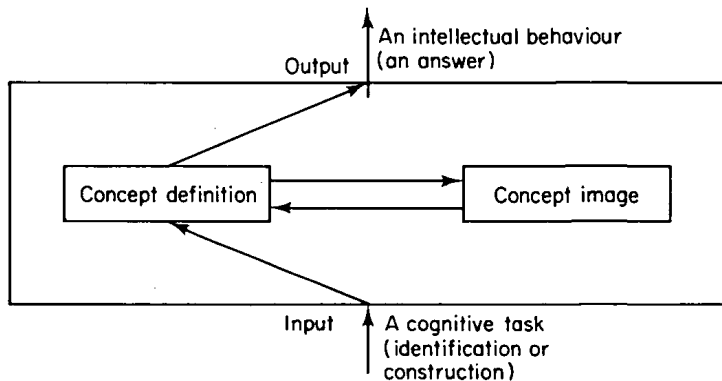
Εννοιακή εικόνα και διδασκαλία

Η συνηθισμένη παραδοχή στη διδασκαλία είναι ότι η εννοιακή εικόνα και ο εννοιακός ορισμός αλληλεπιδρούν, και μάλιστα ότι ο εννοιακός ορισμός καθορίζει την εννοιακή εικόνα.



Εννοιακή εικόνα και διδασκαλία

Παρόμοια, στη διαδικασία αναγνώρισης ενός γεωμετρικού αντικειμένου, θεωρείται ότι ενεργοποιούνται τόσο η εννοιακή εικόνα όσο και ο εννοιακός ορισμός.

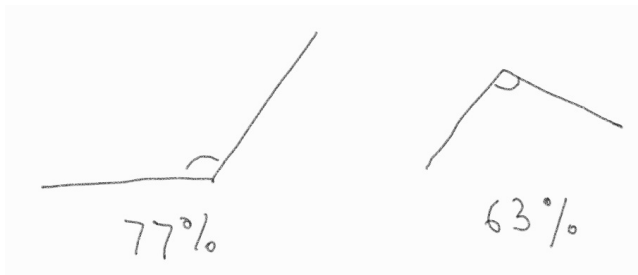


Περιορισμένη εννοιακή εικόνα

Έρευνες όμως έχουν δείξει ότι η εννοιακή εικόνα καθορίζει σχεδόν αποκλειστικά την απάντηση των μαθητριών.

Έρευνα των Vinner και Hershkowitz, με 550 μαθήτριες και μαθητές Γυμνασίου, σε υποβαθμισμένη περιοχή.

Αναγνώριση αμβλείας γωνίας.

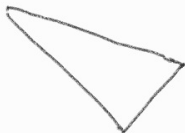


Περιορισμένη εννοιακή εικόνα

Αναγνώριση ορθογωνίου τριγώνου.



76%



67%



41%

Περιορισμένη εννοιακή εικόνα

Το πρόβλημα δεν εμφανίζεται μόνο σε υποβαθμισμένα σχολεία. Σε έρευνα του Fujita με μαθήτριες άνω του μέσου όρου, περισσότερες από τις μισές αναγνωρίζουν τα τετράπλευρα κυρίως χρησιμοποιώντας πρότυπα παραδείγματα, παρ' όλο που γνωρίζουν το σωστό ορισμό.

Αυτό οδηγεί σε δυσκολία κατανόησης των σχέσεων εγκλεισμού μεταξύ των διαφόρων ειδών τετραπλεύρων.

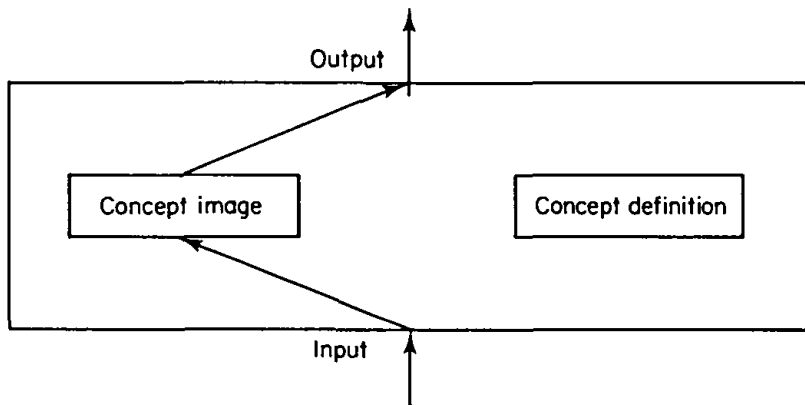
Ο ρόλος της εννοιακής εικόνας

Οι Vinner και Hershkowitz ισχυρίζονται ότι

- Για να χειριστεί ένα άτομο μία έννοια, χρειάζεται την εννοιακή εικόνα αλλά όχι τον εννοιακό ορισμό.
- Όταν μία έννοια εισάγεται μέσω ενός εννοιακού ορισμού, ο ορισμός παραμένει ανενεργός ή λησμονείται. Σχεδόν πάντα, η εννοιακή εικόνα ενεργοποιείται κατά τη σκέψη.

Ο ρόλος της εννοιακής εικόνας

Έτσι, αντί για τα υποτιθέμενα μοντέλα, πιο κοντά στη λειτουργία της σκέψης είναι το ακόλουθο.



Συνάφεια ορισμού και εικόνας

Πώς μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα και να βοηθήσουμε τις μαθήτριες να δημιουργήσουν μία πλούσια εννοιακή εικόνα, σε συνάφεια με τον ορισμό;

Έχουν γίνει έρευνες, όπου καταβάλλεται προσπάθεια ο εννοιακός ορισμός να δημιουργηθεί από τις εκπαιδευόμενες.

Κατασκευή ορισμού

Οι Zandieh και Rasmussen περιγράφουν ένα άλλο διδακτικό πείραμα.

Στην πρώτη φάση, οι εκπαιδευόμενες δημιουργούν τον (περιγραφικό) ορισμό ενός τριγώνου στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας τις πλούσιες εννοιακές εικόνες τους για τρίγωνα.

Αυτό προκάλεσε αρκετές συζητήσεις στις ομάδες, για το ποιές ιδιότητες πρέπει να περιληφθούν στον ορισμό, έτσι ώστε αυτός να είναι απλός και σαφής.

Κατασκευή ορισμού

Για παράδειγμα, η ιδιότητα ότι το άθροισμα των γωνιών είναι 180° πρέπει να μπει στον ορισμό ή όχι;

Στις συζητήσεις αναδείχθηκε ότι ο ορισμός πρέπει να καλύπτει όλα τα σχήματα που θεωρούμε τρίγωνα, αλλά να μην επιτρέπει σχήματα που δεν θεωρούμε τρίγωνα.

Ένα άλλο θέμα που αναδείχθηκε στη συζήτηση της τάξης, είναι οι ακραίες περιπτώσεις: πρέπει ο ορισμός να επιτρέπει να βρίσκονται οι κορυφές σε μία ευθεία;

Κατασκευή ορισμού

Στην επόμενη φάση της δραστηριότητας, οι εκπαιδευόμενες χρησιμοποιούν τον (κατασκευαστικό) ορισμό ενός τριγώνου πάνω στη σφαίρα, για να δημιουργήσουν εννοιακή εικόνα για τα σφαιρικά τρίγωνα.

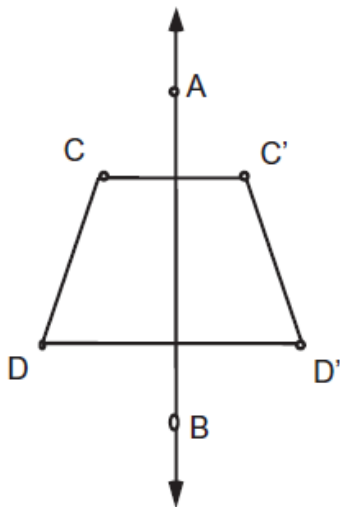
Κατασκευή ορισμού

Ο De Villiers περιγράφει ένα διδακτικό πείραμα, όπου ζητήθηκε από τις εκπαιδευόμενες να κατασκευάσουν τον ορισμό του ισοσκελούς τραπεζίου.

Η δραστηριότητα ξεκίνησε από μία γεωμετρική κατασκευή ενός τραπεζίου, με ανάκλαση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μία ευθεία που δεν το τέμνει.

Στη συνέχεια ζητήθηκε να βρουν ιδιότητες που χαρακτηρίζουν το σχήμα, και να επιλέξουν ένα ελάχιστο σύνολο τέτοιων ιδιοτήτων.

Κατασκευή ορισμού



Βιβλιογραφία

De Villiers. Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35, 2004.

Tall, Vinner. Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1981.

Vinner, Hershkowitz. Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14, 1983.

Βιβλιογραφία

Vinner. Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Berkeley, 1980.

Zandieh, Rasmussen. Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. The Journal of Mathematical Behavior, 29, 2010.