

Γεωμετρία και Διδακτική
Διάλεξη 1.4
Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης (2)

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Χαρακτηρισμός των επιπέδων van Hiele

Θα εξετάσουμε μία έρευνα των Burger και Shaughnessy που έγινε τη δεκαετία του '80 στις Ηνωμένες Πολιτείες με σκοπό

- α' να εξετάσει τη χρησιμότητα των επιπέδων van Hiele για τη μελέτη των διαδικασιών σκέψης των ατόμων σε γεωμετρικές δραστηριότητες,
- β' να εξετάσει τη δυνατότητα να χαρακτηριστούν λειτουργικά τα επίπεδα από τη συμπεριφορά των ατόμων.

Σε αυτήν μελετούν τις απαντήσεις μαθητριών και μαθητών όλων των βαθμίδων της εκπαίδευσης, από προσχολική αγωγή μέχρι τριτοβάθμια, σε συνεντεύξεις στις οποίες τους ζητήθηκε να απαντήσουν ερωτήσεις σχετικές με γεωμετρικά σχήματα.

Η έρευνα

Στις συνεντεύξεις τέθηκαν οκτώ δραστηριότητες σχετικές με απλά γεωμετρικά σχήματα (τρίγωνα και τετράπλευρα).

Οι τέσσερεις πρώτες στόχευαν να διακρίνουν χαρακτηριστικά των επιπέδων 0 – 2.

- α' Σχεδίαση
- β' Αναγνώριση
- γ' Ορισμός
- δ' Διαλογή

Η έρευνα

Οι επόμενες τέσσερις στόχευαν να διακρίνουν και χαρακτηριστικά των επιπέδων 2 και 3.

- Ε' "Μυστηριώδες σχήμα", προσδιορισμός από ιδιότητες
- Ε' Αξιώματα
- Ε' Θεωρήματα
- Η' Αποδείξεις

Η έρευνα

Στην έρευνα έλαβαν μέρος συνολικά 45 μαθητές και μαθήτριες από 7 ηλικιακές ομάδες. Θα δούμε κάποια αποτελέσματα τριών μαθητών και τριών μαθητριών.

- α. Helen – μαθήτρια 3ης Δημοτικού
- β. Bud – μαθητής 5ης Δημοτικού
- γ. Amy – μαθήτρια 2ας Γυμνασίου
- δ. Don – μαθητής Λυκείου, ενώ παρακολουθεί το μάθημα Γεωμετρίας
- ε. Karen – μαθήτρια Λυκείου, έχει παρακολουθήσει το μάθημα Γεωμετρίας
- ς. Tom – φοιτητής Μαθηματικών, 2ο έτος

Δραστηριότητα Σχεδίασης

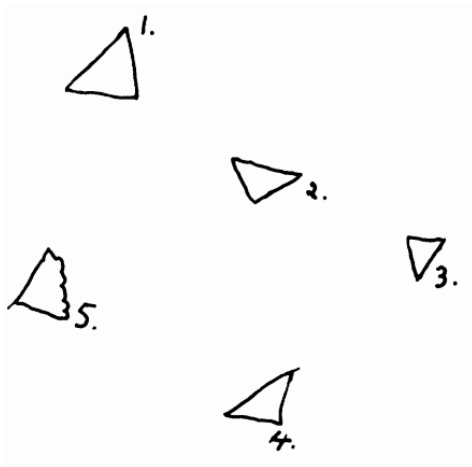
Ζητήθηκε να σχεδιάσουν ένα τρίγωνο. Μετά ένα άλλο τρίγωνο, διαφορετικό από το πρώτο. Μετά άλλο ένα, κ.ο.κ

Οι μαθήτριες ρωτήθηκαν πώς διαφέρουν τα τρίγωνα που σχεδίασαν, και πόσα διαφορετικά μπορούν να σχεδιάσουν.

Σκοπός της δραστηριότητας ήταν να δούν

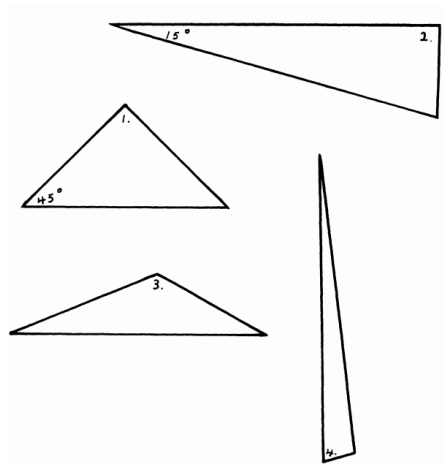
- ποιές ιδιότητες αλλάζουν για να σχεδιάσουν διαφορετικά τρίγωνα;
- θεωρούν ότι υπάρχουν πεπερασμένα ή άπειρα τρίγωνα;

Δραστηριότητα Σχεδίασης



Σχῆμα: Τα τρίγωνα του Bud, 5η Δημοτικού.

Δραστηριότητα Σχεδίασης



Σχῆμα: Τα τρίγωνα της Amy, 2α Γυμνασίου

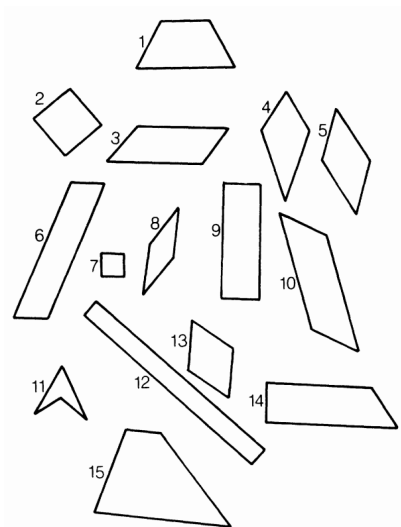
Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού

Δόθηκε ένα φύλλο με τετράπλευρα σχήματα.

Για τη δραστηριότητα Αναγνώρισης, ζητήθηκε από τη μαθήτριά να σημειώσει τα τετράγωνα, τα ορθογώνια, και εάν γνώριζε, τα παραλληλόγραμμα και τους ρόμβους, (ανάλογα για τρίγωνα).

Μετά ζητήθηκε να αιτιολογήσει τις επιλογές της, ή γιατί έχουν παραληφθεί κάποια σχήματα.

Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού



Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού

Για τη δραστηριότητα Ορισμού, ρωτήθηκε: “Ποιά πράγματα θα έλεγες σε ένα παιδί να κοιτάξει για να επιλέξει όλα τα ορθογώνια;”, ή ανάλογα για άλλα σχήματα.

Έπειτα ρωτήθηκε εάν μπορεί να κάνει τη λίστα μικρότερη.

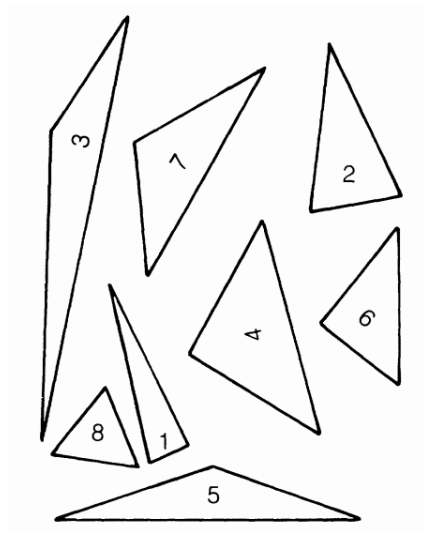
Για να ελεγχθεί εάν βλέπουν τις διάφορες κατηγορίες ως διαμέριση ή ιεραρχικά, ερωτήθηκαν; “Είναι το 9 παραλληλόγραμμο;”, “Είναι το 2 ορθογώνιο;”.

Δραστηριότητα Διαλογής

Για τη δραστηριότητα Διαλογής, τοποθετήθηκαν στο τραπέζι κομμένα τρίγωνα από χαρτόνι (ή τετράπλευρα).

Η μαθήτριά ρωτήθηκε εάν μπορεί να βάλει σε ομάδες τα σχήματα που είναι όμοια με κάποιο τρόπο, και να πει με ποιό τρόπο είναι όμοια.

Δραστηριότητα Διαλογής



“Μυστηριώδες σχήμα”: Βρές το σχήμα μου!

Η δραστηριότητα “Μυστηριώδες σχήμα” στοχεύει να διερευνήσει τη δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων από δεδομένα. Είναι ένα παιχνίδι ανακάλυψης, όπου ο ερευνητής παρουσιάζει στοιχεία για κάποιο σχήμα. Εάν το παιδί έχει αρκετά στοιχεία για να βρεί το σχήμα, τον σταματά. Εάν όχι, ζητά και άλλο ένα στοιχείο.

Κατόπιν ζητείται από το παιδί να εξηγήσει πώς γνωρίζει με βεβαιότητα το σχήμα, και εάν κάποιο επιπλέον στοιχείο μπορεί να αλλάξει το σχήμα.

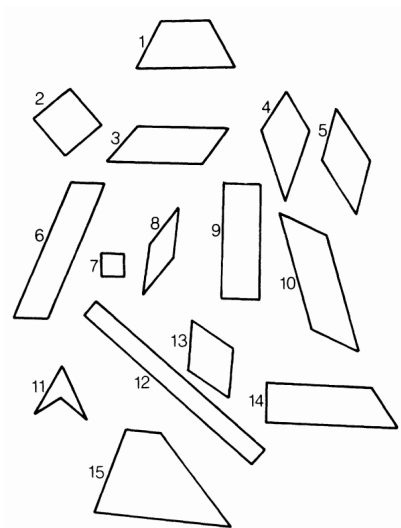
Αξιώματα, θεωρήματα. Απόδειξη

Τα μεγαλύτερα παιδιά ρωτήθηκαν εάν έχουν ακούσει για αξίωμα, αίτημα ή θεώρημα, και ζητήθηκε να δώσουν παράδειγμα.

Για τη δραστηριότητα Απόδειξης ζητήθηκε να εξετάσουν το ερώτημα: “Υποθέστε ότι έχετε ένα τετράπλευρο, με κάθε ζεύγος απέναντι πλευρών ίσες. Πρέπει να είναι παράλληλες οι πλευρές;”.

Ζητήθηκε επίσης να εξετάσουν την αντίστροφη πρόταση.

Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού



Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού

Για την Helen και τον Bud έπαιξε ρόλο ο προσανατολισμός.

Η Helen θεώρησε τα 2, 6, 7, 9, 12 ως τετράγωνα.

Η Amy αναγνώρισε σωστά τα σχήματα, χρησιμοποιώντας μία διαμεριστική ταξινόμηση: τα τετράγωνα δεν είναι ορθογώνια, τα ορθογώνια δεν είναι παραλληλόγραμμα.

Για παράδειγμα, χαρακτήρισε τα ορθογώνια ως:

Δύο ίσες πλευρές, παράλληλες. Δύο μεγαλύτερες πλευρές που είναι ίσες και παράλληλες, και συνδέονται σε 90 μοίρες.

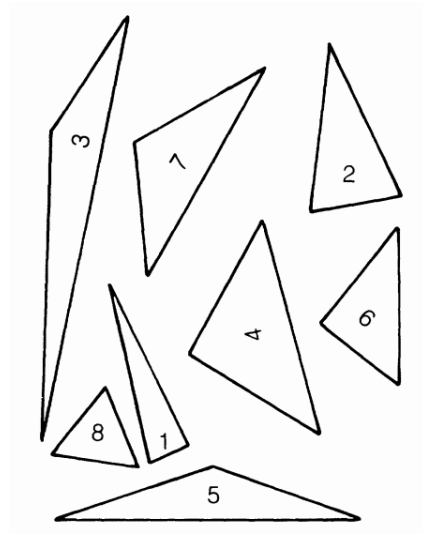
Δραστηριότητες Αναγνώρισης και Ορισμού

Η Karen όρισε τα σχήματα με τις ιδιότητές τους, όχι πάντα τις ελάχιστες.

Ο Don όρισε τα τετράπλευρα χρησιμοποιώντας σχέσεις μεταξύ των τύπων. Για παράδειγμα:

- Ένα τετράγωνο είναι ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις ιδιότητες του ρόμβου και του ορθογωνίου.
- Ένα ορθογώνιο είναι ένα παραλληλόγραμμο με τουλάχιστον μία ορθή γωνία.

Δραστηριότητα Διαλογής



Δραστηριότητες Διαλογής

Ο Bud επέλεξε τα τρίγωνα 4 και 8, για τα οποία είπε ότι έχουν τρεις ίσες πλευρές. Κατόπιν επέλεξε τα 6 και 7, που είπε ότι έχουν τρεις άνισες πλευρές.

Η Amy διέκρινε τα τρίγωνα με πολλούς τρόπους, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των πλευρών και των γωνιών. Δεν επέλεξε απλώς κάποια τρίγωνα, αλλά έκανε διαμερίσεις. Για παράδειγμα, τα 1 και 2 “έχουν γωνία 90 μοιρών”, “τα 2, 4 και 5 έχουν δύο πλευρές ίσες”, “τα 3 και 7 έχουν τρία διαφορετικά μήκη και δεν έχουν γωνία 90 μοιρών”. Επίσης χρησιμοποίησε ασαφείς ιδότητες, όπως “μικρή γωνία επάνω, μεγαλύτερες στη βάση”.

Ο Don διέκρινε τα τρίγωνα σε γενικούς τύπους, ισοσκελή, σκαληνά και ορθογώνια τρίγωνα.

“Μυστηριώδες σχήμα”: Βρές το σχήμα μου!

Παράδειγμα: Δίδονται διαδοχικά οι ακόλουθες πληροφορίες,

- α' Κλειστό σχήμα με 4 πλευρές
- β' Δύο μακριές και δύο κοντές πλευρές
- γ' Οι δύο μακριές πλευρές έχουν το ίδιο μήκος
- δ' Οι δύο κοντές πλευρές έχουν το ίδιο μήκος

“Μυστηριώδες σχήμα”: Βρές το σχήμα μου!

- Ⓔ Μία από τις γωνίες είναι μεγαλύτερη από μία άλλη
- Ⓕ Δύο γωνίες έχουν το ίδιο μέτρο
- Ⓗ Οι άλλες δύο έχουν το ίδιο μέτρο
- Ⓣ Οι δύο μακριές πλευρές είναι παράλληλες
- Ⓢ Οι δύο κοντές πλευρές είναι παράλληλες

“Μυστηριώδες σχήμα”: Βρές το σχήμα μου!

Η Helen και ο Bud αντιμετώπισαν το πρόβλημα ως μαντεψιά, ή χρησιμοποίησαν οπτικά επιχειρήματα βασισμένα σε σχέδια.

Η Amy και η Karen χρησιμοποίησαν τις ιδιότητες για να επιβεβαιώσουν μία μαντεψιά, ως αναγκαίες συνθήκες, όχι πάντα τις ελάχιστες ικανές.

Ο Don χρησιμοποίησε τα στοιχεία για να αποκλείσει γενικές κατηγορίες

Αξιώματα, θεωρήματα

Η Karen διέκρινε τα αιτήματα από τα θεωρήματα, λέγοντας:
Ένα θεώρημα είναι κάτι που μπορείς να αποδείξεις. Δεν μπορείς να αποδείξεις τα αιτήματα. Ένα αίτημα είναι κάτι που υποθέτεις.

Ο Don είχε διαβάσει ότι υπάρχει διαφορά μεταξύ αιτημάτων και θεωρημάτων, αλλά δεν θυμόταν τι.

Απόδειξη

Η Amy απάντησε την ερώτηση για τα παραλληλόγραμμα, κάνοντας προσεκτικά σχέδια, και επιχειρηματολογώντας με αυτά.

Η Karen ακολούθησε την ίδια προσέγγιση, αποφεύγοντας την τυπική απόδειξη.

Ο Don και ο Tom επέλεξαν να κατασκευάσουν αποδείξεις της πρότασης, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των τετραπλεύρων. Το κατάφεραν με λίγη βοήθεια.

Κατάταξη σε επίπεδα

Οι μαθήτριες και οι μαθητές κατατάχθηκαν σε κάποιο επίπεδο για κάθε δραστηριότητα.

Για τις δραστηριότητες Σχεδίασης, Αναγνώρισης και Διαλογής δε ήταν δυνατή η κατάταξη πέρα από το επίπεδο 2.

Σχεδίαση

Επίπεδο 0: Η Helen και ο Bud, αναφερόταν σε οπτικά χαρακτηριστικά, όπως 'λεπτό', 'προς τα πάνω'. Θεωρούσαν ότι υπάρχει πεπερασμένο πλήθος σχημάτων.

Επίπεδο 1: Η Amy, επικέντρωνε στα στοιχεία των σχημάτων.

Επίπεδο 2: Ο Don, θεωρούσε τα σχήματα αντιπροσωπευτικά γενικών τύπων.

Αναγνώριση, ορισμός

Επίπεδο 0: Οπτικές ιδιότητες, άσχετες ιδιότητες όπως προσανατολισμός, Παρέβλεπαν σημαντικές ιδιότητες.

Επίπεδο 1: Διάκριση σχημάτων και αναγνώριση με βάση τις ιδιότητες. Συχνά χρησιμοποιούσαν διαμεριστική ταξινόμηση. Χρησιμοποιούσαν περισσότερα από τα ελάχιστα ικανά χαρακτηριστικά για τον ορισμό.

Επίπεδο 2: Ο Don έδωσε ελάχιστα χαρακτηριστικά για τον ορισμό, χρησιμοποιώντας διακρίσεις από άλλα σχήματα.

Επίπεδο 3: Ο Tom διατύπωνε εικασίες και προσπαθούσε να τις αποδείξει.

Διαλογή

Επίπεδο 0: Μή πλήρης διαλογή. Βασισμένη κυρίως σε μη ακριβείς οπτικές ιδιότητες ή χωρίς αναφορά στις ιδιότητες.

Επίπεδο 1: Σαφής αναφορά στις ιδιότητες των σχημάτων, αν και κάποιες φορές οι ιδιότητες δεν ήταν ακριβείς.

Επίπεδο 2: Σαφής αναφορά σε διαφορετικούς τύπους σχημάτων.

“Μυστηριώδες σχήμα”

Επίπεδο 0: Μαντεψιά, χωρίς χρήση των ιδιοτήτων.

Επίπεδο 1: Οι ιδιότητες χρησιμοποιούνται για να επιβεβαιώσουν μία μαντεψιά.

Επίπεδο 2: Ο Don αναζήτησε ελάχιστο σύνολο ιδιοτήτων, και χρησιμοποίησε αποκλεισμό για να βρει το σχήμα.

Επίπεδο 3: Χρήση συλλογισμών για την εύρεση του σχήματος.

Απόδειξη

Επίπεδο 0: Προσπάθεια απόδειξης μόνο με σχεδίαση ή αναδιατύπωση της πρότασης.

Επίπεδο 1: Προσέγγιση Φυσικής, σχήματα για την επαγωγική επαλήθευση.

Επίπεδο 2: Εκφράζουν επιθυμία για παραγωγικά επιχειρήματα, αλλά χρειάζεται επανειλημμένα βοήθεια από τον ερευνητή για να τα κατασκευάσουν.

Επίπεδο 3: Κατασκευή επαγωγικού επιχειρήματος, διατυπώνοντας και αποδεικνύοντας ικανές συνθήκες για να είναι το τετράπλευρο παραλληλόγραμμο.

Συμπεράσματα

Τα επίπεδα van Hiele αποτελούν πολύπλοκες δομές, και εξαρτώνται από την ανάπτυξη εννοιών και συλλογιστικών διαδικασιών.

Δεν είναι διακριτά και στατικά αλλά μάλλον δυναμικά και κάποιες μαθήτριες φαίνεται να μετακινούνται μεταξύ δύο επιπέδων, ακόμη και στην ίδια δραστηριότητα, (η Karen μεταξύ επιπέδων 1 και 2).

Οι ερευνητές θεωρούν ότι τα επίπεδα van Hiele φαίνεται να είναι χρήσιμα για την περιγραφή των νοερών διαδικασιών των μαθητριών σε δραστηριότητες σχετικές με πολύγωνα.

Συμπεράσματα

Κάποια συμπεράσματα με επιπτώσεις για εκπαιδευτικούς:

Η δημιουργία των εννοιών στη Γεωμετρία μπορεί να συντελείται κατά τη διάρκεια μεγάλων χρονικών περιόδων, και να απαιτεί ειδική εκπαίδευση.

Μαθητές και μαθήτριες της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν έχουν πλήρη αντίληψη βασικών γεωμετριών εννοιών και των ιδιοτήτων τους.

Αδυναμία να επιχειρηματολογήσουν με τυπικό τρόπο, για να “επανανακαλύψουν” την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Μοναδική “διέξοδος” η αποστήθιση.

Επανεξέταση της Θεωρίας van Hiele

Πιο πρόσφατες έρευνες έχουν κριτικάρει κάποιες πλευρές της θεωρίας των van Hiele, ιδίως τον ιεραρχικό χαρακτήρα των επιπέδων.

Η Παπαδημήτρη-Καχριμάνη, διαπιστώνει κάποιες αντιφάσεις στην παρουσίαση της θεωρίας από τον Pierre van Hiele, και εξετάζει κατά πόσο το μοντέλο van Hiele είναι ιεραρχικό, και τις συνέπειες του προσδιορισμού μίας ιεραρχικής διάστασης στη σκέψη.

Επανεξέταση της Θεωρίας van Hiele

Προτείνει να εξετάσουμε το μοντέλο περιγραφής της γεωμετρικής σκέψης, χωρίς αναφορά σε “επίπεδα”. Αυτό μας επιτρέπει να αναφερθούμε, όχι σε ανώτερα και κατώτερα επίπεδα σκέψης, αλλά σε **διαφορετικούς τρόπους σκέψης**.

Εξετάζοντας τη βιβλιογραφία γύρω από το θέμα κάτω από αυτό το πρίσμα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι τα άτομα, μπορούν να σκέφτονται με διαφορετικούς τρόπους ανεξαρτήτως ηλικίας, και μπορούν να σκέφτονται με διαφορετικούς τρόπους ταυτόχρονα.

Βιβλιογραφία

Burger, W.F., Shaughnessy, J.M.. Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. Journal for Research in Mathematics Education, 17, 1986.

Papademetri-Kachrimani, C., Revisiting van Hiele. For the Learning of Mathematics, 32, 2012.