Introduction

Je ne discuterai pas ici de la nécessité d'un enseignement de la géométrie; j'étudierai seulement la façon dont il peut être fait.
Il y a maintenant un accord assez unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants :

1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur R, à deux (ou trois) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique $u.v$ telle que $u.u > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$. C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces R^n, C^n, espace de Hilbert, etc.).
De nombreux professeurs de l'enseignement du second degré témoignent, par leur expérience, que cette définition peut être déjà utilisée avec grand profit par des élèves de 17 ans (classe terminale des lycées) ayant étudié antérieurement le produit scalaire. Cette méthode permet dans cette classe une économie de pensée considérable, et conduit tout naturellement à des démonstrations basées sur de véritables méthodes. Elle apporte en même temps au professeur de physique une aide précieuse, puisqu'elle lui permet de définir et d'étudier enfin correctement les notions de travail, de barycentre, de résultante de forces.
Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.
Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. Diverses expériences ont d'ailleurs montré le goût que

manifestent certains enfants, pour une axiomatique précise; pour ceux-ci les mathématiques apparaissent comme un jeu aux règles strictes, et ils ont une grande joie à jouer correctement ce jeu. Il nous faut donc trouver une axiomatique *simple*, aux axiomes *forts*, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et *intuitifs*, c'est-à-dire traduisant des propriétés de l'espace qui nous entoure faciles à vérifier.

Peu importe qu'ils ne soient pas indépendants; mais je ne pense pas qu'il soit désirable, comme l'ont préconisé certains professeurs, de prendre au départ de très nombreux axiomes : le jeu mathématique basé sur trop de règles, devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude.

Il est bien établi que l'« axiomatique » d'Euclide ne répond plus à nos exigences logiques; on peut en dire autant, de bien des « axiomatiques » qu'on trouve dans les manuels d'enseignement; bien qu'un effort notable se manifeste dans les manuels parus ces dernières années.

On sait qu'Hilbert a élagué et complété l'axiomatique d'Euclide, pour en faire un système logiquement satisfaisant; sa préoccupation essentielle n'était pas l'enseignement élémentaire; aussi les développements de forme élémentaire, qui ont été donnés à son axiomatique (voir par exemple la Géométrie Rationnelle de Halsted) sont-ils mal adaptés à l'enseignement.

L'axiomatique d'Euclide-Hilbert est basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles, et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs.

Certes le triangle gardera toujours une place intéressante, due à ce qu'il est le polygone plan le plus simple, et qu'un triangle détermine un plan et un seul. Mais il faut freiner énergiquement le goût pervers qui entraîne vers les points remarquables du triangle, et vers des relations métriques parfois élégantes mais inutiles.

Notre faveur doit aller à des méthodes qui reposent sur les notions fondamentales que vingt siècles de mathématiques ont fini par dégager : notion d'ensemble, relations d'ordre et d'équivalence, loi algébrique, espace vectoriel, symétrie, transformations.

Non seulement ces méthodes permettront d'utiliser très tôt les outils simples et efficaces de l'algèbre, apportant ainsi une économie de pensée; mais par le recours qu'elles supposent à des notions fondamentales, elles enrichiront la structure mentale de nos élèves et les prépareront aux tâches de l'avenir.