

Γεωμετρία και Διδακτική

Διάλεξη 1.3

Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η θεωρία των van Hiele

Τα Επίπεδα Γεωμετρικής Σκέψης είναι μία προσέγγιση της μάθησης της Γεωμετρίας που έχει χρησιμοποιηθεί πολύ τα προηγούμενα 60 χρόνια. Εισήχθησαν τη δεκαετία του 1950, από την Ολλανδή ερευνήτρια Dina van Hiele-Geldof και τον σύζυγό της Pierre van Hiele.

Η θεωρία των van Hiele ιεραρχεί τον τρόπο κατανόησης των ιδεών του χώρου σε πέντε επίπεδα.

- 0: Εποπτική αντίληψη
- 1: Ανάλυση
- 2: Αφαίρεση
- 3: Παραγωγικοί συλλογισμοί
- 4: Αυστηρότητα

Χαρακτηριστικά των επιπέδων van Hiele

Κάθε ένα από τα επίπεδα περιγράφει τις συλλογιστικές διεργασίες που χρησιμοποιούνται στην εξέταση ή τη μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων.

Τα επίπεδα δεν περιγράφουν τις γνώσεις που κατέχει ένα άτομο σε κάθε επίπεδο. Περιγράφουν τον τρόπο σκέψης και τους τύπους των γεωμετρικών ιδεών που επεξεργάζεται νοητικά κατά την ενασχόληση με ένα γεωμετρικό πρόβλημα.

Κάθε επίπεδο χαρακτηρίζεται από τα αντικείμενα της σκέψης που επεξεργάζεται το άτομο, και τα προϊόντα της σκέψης.

Τα προϊόντα της σκέψης σε ένα επίπεδο αποτελούν τα αντικείμενα της σκέψης στο επόμενο επίπεδο.

Επίπεδο 0: Εποπτική αντίληψη – Νοερή απεικόνιση

Η μαθήτρια εξετάζει βασικές γεωμετρικές έννοιες, όπως απλά σχήματα, βασιζόμενη κυρίως στα καθολικά οπτικά χαρακτηριστικά τους, χωρίς ειδική αναφορά σε ιδιότητες των στοιχείων τους.

Το σχήμα ορίζεται για το παιδί από την εμφάνισή του: ένα ορθογώνιο είναι ορθογώνιο “επειδή μοιάζει με μία πόρτα”, ένα τετράγωνο “μοιάζει με τετράγωνο”.

Η μορφή έχει μεγαλύτερη σημασία από άλλες ιδιότητες.

Για παράδειγμα, ένα τετράγωνο του οποίου οι πλευρές σχηματίζουν γωνία 45° με την οριζόντιο, μπορεί να μη θεωρηθεί τετράγωνο από ένα άτομο σε αυτό το επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Επίπεδο 0: Εποπτική αντίληψη – Νοερή απεικόνιση

Τα παιδιά μπορούν να εκτελούν μετρήσεις και να συζητούν για τις ιδιότητες των σχημάτων, αλλά δεν επεξεργάζονται αυτές τις ιδιότητες με σαφήνεια.

- Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **τα σχήματα και η μορφή τους**, με τι μοιάζουν.
- Τα προϊόντα της σκέψης είναι **τάξεις ή ομάδες σχημάτων που φαίνονται όμοια**.

Επίπεδο 1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων

Η μαθήτριά εξετάζει τις γεωμετρικές έννοιες μέσω μίας άτυπης ανάλυσης των στοιχείων και των χαρακτηριστικών τους.

Διακρίνονται κάποιες αναγκαίες ιδιότητες για ένα σχήμα.

Το παιδί αντιμετωπίζει τα σχήματα στο επίπεδο μίας ομάδας, παρά ως μεμονωμένα σχήματα.

Εστιάζοντας σε μία τάξη σχημάτων, μπορεί να συλλογιστεί σχετικά με το τι καθιστά ένα ορθογώνιο ορθογώνιο, και να επικεντρωθεί στα σημαντικά χαρακτηριστικά:

τέσσερις πλευρές, απέναντι πλευρές παράλληλες,
απέναντι πλευρές ίσες, τέσσερις ορθές γωνίες, ίσες διαγώνιοι, κλπ.

Επίπεδο 1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων

Χαρακτηριστικά όπως ο προσανατολισμός ή το μέγεθος, που δεν επηρεάζουν το εάν είναι ορθογώνιο, πέφτουν σε δεύτερη μοίρα.

Η μαθήτρια συνειδητοποιεί ότι τα διάφορα σχήματα κατατάσσονται στην ίδια ομάδα εξ αιτίας των ιδιοτήτων τους.

Οι ιδέες για ένα συγκεκριμένο σχήμα μπορούν να γενικευτούν, και να συμπεριλάβουν όλα τα σχήματα της ομάδας.

όλοι οι κύβοι έχουν έξι ίσες έδρες,
και κάθε μία από αυτές είναι ένα τετράγωνο

Επίπεδο 1: Ανάλυση γεωμετρικών μορφών και σχέσεων

Τα άτομα σε αυτό το επίπεδο μπορούν να καταγράψουν όλες τις ιδιότητες των τετραγώνων, των ορθογωνίων, των παραλληλογράμμων, αλλά μπορεί να μη διακρίνουν ότι όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα.

Οι ιδιότητες συνδέονται με τα σχήματα, αλλά δεν είναι διατεταγμένες ως συνέπεια η μία κάποιων άλλων.

- Τα αντικείμενα της σκέψης είναι περισσότερο **τάξεις σχημάτων** παρά ξεχωριστά σχήματα.
- Τα προϊόντα της σκέψης είναι **οι ιδιότητες των σχημάτων**.

Επίπεδο 2: Αφαίρεση, μη τυπική παραγωγή

Αφαίρεση, μη τυπική παραγωγή: αρχή παραγωγικής σκέψης και μαθηματικών συλλογισμών

Σε αυτό το επίπεδο οι ιδιότητες διατάσσονται: κάποιες προκύπτουν από άλλες.

Η μαθήτρια αναγνωρίζει τη λογική διάταξη των ιδιοτήτων των γεωμετρικών αντικειμένων, και μπορεί να διακρίνει αναγκαίες συνθήκες για τον προσδιορισμό μίας έννοιας.

Καθώς ένα άτομο αποκτά την ικανότητα να προβληματίζεται πάνω στις ιδιότητες των σχημάτων, ως γεωμετρικών αντικειμένων, χωρίς τους περιορισμούς του συγκεκριμένου φυσικού αντικειμένου, αρχίζει να διακρίνει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ των ιδιοτήτων.

Ένα τετράπλευρο με τέσσερεις ορθές γωνίες, είναι ορθογώνιο

Επίπεδο 2: Αφαίρεση, μη τυπική παραγωγή

Από την παρατήρηση των ιδιοτήτων, περνάει σε λογικά επιχειρήματα σχετικά με τις ιδιότητες.

Μπορεί να παρακολουθήσει και να αντιληφθεί τη σημασία ενός μη τυπικού παραγωγικού επιχειρήματος για τα σχήματα και τις ιδιότητές τους.

Οι αποδείξεις είναι περισσότερο διαισθητικές, αλλά σε αυτό το επίπεδο η μαθήτρια αρχίζει να εκτιμά τη σημασία των λογικών επιχειρημάτων.

- Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **οι ιδιότητες των σχημάτων**.
- Τα προϊόντα της σκέψης είναι **σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών αντικειμένων**.

Επίπεδα van Hiele, 0–2

		Επίπεδο 2 Μη τυπική παραγωγή	Ιδιότητες σχημάτων	Σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες
Επίπεδο 1 Ανάλυση		Κλάσεις σχημάτων	Ιδιότητες σχημάτων	
Επίπεδο 0 Νοερή απεικόνιση	Σχήματα	Κλάσεις σχημάτων		

Επίπεδο 3: Παραγωγικοί συλλογισμοί, το νόημα της συνεπαγωγής

Η μαθήτρια μπορεί να εξετάσει περισσότερα πράγματα, πέρα από τις ιδιότητες των σχημάτων. Παράγει εικασίες για σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες, και αναρωτιέται για την ορθότητα, την “αλήθεια” των εικασιών.

Η ανάλυση των μη τυπικών επιχειρημάτων για τον έλεγχο των εικασιών, οδηγεί στην ανάπτυξη ενός δομημένου συστήματος, με αρχικές έννοιες, αξιώματα, ορισμούς, θεωρήματα και άλλα συμπεράσματα.

Επίπεδο 3: Παραγωγικοί συλλογισμοί, το νόημα της συνεπαγωγής

Η μαθήτρια μπορεί να χρησιμοποιεί τυπικά επιχειρήματα στο πλαίσιο ενός μαθηματικού συστήματος.

Μπορεί να εκτιμήσει την αναγκαιότητα αυτού του συστήματος για την κατοχύρωση της γεωμετρικής αλήθειας, να εργάζεται με αφηρημένες προτάσεις για τις γεωμετρικές ιδιότητες, και να βγάζει συμπεράσματα βασισμένα περισσότερο στη λογική παρά στη διαίσθηση.

Επίπεδο 3: Παραγωγικοί συλλογισμοί, το νόημα της συνεπαγωγής

Διακρίνει ιδιότητες, όπως ότι οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούνται, αλλά δεν αρκείται στη παρατήρηση, ή τη μη τυπική εξήγηση.

Εκτιμά ότι χρειάζεται να το αποδείξει με μία σειρά λογικών επιχειρημάτων. Αντιθέτως, ένα άτομο στο Επίπεδο 2, μπορεί να παρακολουθήσει την επιχειρηματολογία, αλλά δεν εκτιμά την αναγκαιότητά της.

- Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων**
- Τα προϊόντα της σκέψης είναι στοιχεία ενός **παραγωγικού αξιωματικού συστήματος για τη γεωμετρία**.

Επίπεδο 4: Αυστηρότητα, αφηρημένη γεωμετρία

Σε αυτό το επίπεδο το αντικείμενο της προσοχής είναι τα ίδια τα αξιωματικά συστήματα, και όχι η παραγωγή συμπερασμάτων μέσα σε ένα σύστημα.

Η φοιτήτρια μελετάει τις διαφορές και τις σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα (ευκλείδεια γεωμετρία, μη ευκλείδειες γεωμετρίες, αφινική και προβολική γεωμετρία).

- Τα αντικείμενα της σκέψης είναι **παραγωγικά αξιωματικά συστήματα για τη γεωμετρία**.
- Τα προϊόντα της σκέψης είναι **συγκρίσεις και αντιπαραβολές ανάμεσα σε διαφορετικά αξιωματικά συστήματα της γεωμετρίας**.

Επίπεδα van Hiele, 2–4

			Επίπεδο 4 Αυστηρότητα	Παραγωγικά συστήματα ιδιοτήτων	Ανάλυση παραγωγικών συστημάτων
		Επίπεδο 3 Παραγωγή	Σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες	Παραγωγικά συστήματα ιδιοτήτων	
Επίπεδο 2 Μη τυπική παραγωγή	Ιδιότητες σχημάτων	Σχέσεις ανάμεσα στις ιδιότητες			

Χαρακτηριστικά των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης

Ας δούμε κάποια χαρακτηριστικά των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης, σύμφωνα με τη θεωρία van Hiele.

- α) Τα επίπεδα έχουν καθορισμένη διαδοχική σειρά.
Για να προχωρήσουν τα παιδιά σε κάποιο επίπεδο πάνω από το 0, πρέπει προηγουμένως να περάσουν από όλα τα προηγούμενα.
Σε κάθε επίπεδο, αυτό που ήταν λανθάνον στο προηγούμενο, γίνεται εμφανές.
- β) Τα επίπεδα δεν εξαρτώνται από την ηλικία, όπως τα εξελικτικά στάδια του Piaget. Δεν αποτελούν στοιχεία μίας βιολογικής ωρίμανσης, αλλά αποτέλεσμα μίας διαδικασίας μαθητείας.
Χωρίς την κατάλληλη μαθητεία ένα παιδί του Γυμνασίου ή ένας ενήλικας μπορεί να παραμένει στο επίπεδο 0.

Αντιστοιχία με σχολική πορεία

- Για ένα άτομο που ακολουθεί ένα σύγχρονο εκπαιδευτικό σύστημα, η ηλικία συνδέεται με το είδος και την ποσότητα των γεωμετρικών εμπειριών, και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μία χαλαρή αντιστοιχία των επιπέδων με τις τάξεις του σχολείου:
- K – 4: Προσχολική αγωγή – 4η δημοτικού: Επίπεδο 0
 - 3 – 6: 3η – 6η δημοτικού: Επίπεδο 1
 - 5 – 9: 5η δημοτικού – 3η γυμνασίου: Επίπεδο 2
 - 10 – 12: Λύκειο: Επίπεδο 3

Ο ρόλος της διδασκαλίας

- 8° Η γεωμετρική εμπειρία αποτελεί το σημαντικότερο παράγοντα που επηρεάζει την πρόοδο από το ένα επίπεδο στο άλλο. Η διδασκαλία στοχεύει να βοηθήσει αποτελεσματικά τη μαθήτρια να περάσει από διάφορες φάσεις που οδηγούν στο επόμενο επίπεδο γεωμετρικής σκέψης.

Αυτό επιτυγχάνεται με δραστηριότητες που εμπλουτίζουν τις εμπειρίες στο τρέχον στάδιο και παρωθούν στη διερεύνηση, τη συζήτηση και την αλληλεπίδραση με περιεχόμενο που εντάσσεται στο επόμενο στάδιο.

Η σημασία της επικοινωνίας

- ❶ Κάθε επίπεδο έχει τα δικά του γλωσσικά σύμβολα για τα αντικείμενα και τις δικές του σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων.

Άτομα που επιχειρηματολογούν σε διαφορετικό επίπεδο δεν μπορούν να συνεννοηθούν. Η επικοινωνία προϋποθέτει την προσαρμογή της δασκάλας στο επίπεδο της μαθήτριας. Όταν η διδασκαλία είναι σε επίπεδο ανώτερο από αυτό του μαθητή, υπάρχει έλλειψη επικοινωνίας.

Εάν τα άτομα αντιμετωπίσουν αντικείμενα σκέψης τα οποία δεν έχουν δομηθεί σε προηγούμενα στάδια, δεν θα μπορέσουν να τα διαχειριστούν. Η ενδεχόμενη επιτυχία των παιδιών θα βασίζεται στην αποστήθιση ορισμών, κανόνων ή ακόμη και αποδείξεων, συνεπώς είναι προσωρινή και επιφανειακή.