

Γεωμετρία και Διδακτική

Διάλεξη 1.2

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας

Χρήστος Κουρουνιώτης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

2023

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας έχει εξελιχθεί με χαοτικό τρόπο τις τελευταίες δεκαετίες.

Μετά από δύο χιλιάδες χρόνια κατά τα οποία η διδασκαλία της Γεωμετρίας, και εν πολλοίς των Μαθηματικών, στον δυτικό κόσμο (Ευρώπη και Ισλάμ) ταυτιζόταν με τη μελέτη των Στοιχείων του Ευκλείδη, από τις αρχές του 19ου αιώνα, και ιδιαίτερα το δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, έχουν γίνει πάμπολλες αναμορφώσεις του περιεχομένου και του τρόπου διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας

Στα μέσα του 19ου αιώνα, στη Γαλλία υπήρξε έντονη αντιπαράθεση μεταξύ των υποστηρικτών της Γεωμετρίας για άμεσες εφαρμογές στην εργασία, και αυτών που έβλεπαν τη Γεωμετρία πιο θεωρητικά, προσανατολισμένη στην εξάσκηση του συλλογισμού.

Το 1959, ο σημαντικός Γάλλος μαθηματικός J.Dieudonné εξέφρασε το πνεύμα της μεταρύθμισης των “Νέων Μαθηματικών” με την κραυγή “Ο Ευκλείδης πρέπει να φύγει!” με την οποία ήθελε να αντικαταστήσει τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στις ανώτερες τάξεις της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης με τη διδασκαλία των διανυσματικών χώρων 2 και 3 διαστάσεων.

Αναμορφώσεις της διδασκαλίας της Γεωμετρίας

Αποτέλεσμα αυτών των αντιπαραθέσεων ήταν να υπάρξουν πολλές προσπάθειες αναμόρφωσης της διδασκαλίας της Γεωμετρίας.

Κάποιες από αυτές προσπάθησαν να φέρουν τη Γεωμετρία του σχολείου πιο κοντά στις σύγχρονες μαθηματικές πρακτικές, στο πνεύμα των “Νέων Μαθηματικών”.

Άλλες προσπάθησαν να αποφύγουν θέματα που δυσκολεύουν τις μαθήτριες. Οι εξετάσεις του προγράμματος PISA αποτελούν ένδειξη, αλλά και καθοδηγούν τον τρόπο με τον οποίο η διδασκαλία της Γεωμετρίας γίνεται πιο χρησιμοθηρική.

Αναμορφώσεις της διδασκαλίας της Γεωμετρίας

Οι πολλές προσπάθειες αναμόρφωσης τα τελευταία 50 χρόνια έγιναν με αλλοπρόσαλλο τρόπο, πολύ διαφορετικά στις διαφορετικές χώρες, αλλά και με συχνές αλλαγές στην ίδια χώρα.

Για παράδειγμα, στη Γαλλία, η διδασκαλία των γεωμετρικών μετασχηματισμών κατέλαβε κεντρική θέση στις αναμορφώσεις της δεκαετίας του 1970, σταδιακά περιορίστηκε μέχρι το 2010, αλλά επανέρχεται την τελευταία δεκαετία.

Αυτές οι αλλαγές σημαίνουν ότι συχνά οι δασκάλες καλούνται να διδάξουν αντικείμενα που δεν έχουν οι ίδιες διδαχθεί.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας

Εκτός από τις διαφορές στο περιεχόμενο, υπάρχουν πολλές διαφορές και στον τρόπο παρουσίασης και διδασκαλίας της Γεωμετρίας από χώρα σε χώρα.

Στις ΗΠΑ επικρατεί η “απόδειξη σε δύο στήλες” (two column proof).

Σε άλλες χώρες οι αποδείξεις παρουσιάζονται αναλυτικά, με λεπτομερή αιτιολόγηση κάθε βήματος.

Αλλού η έμφαση είναι στο σχήμα, με επισημάνσεις πάνω στο σχήμα και περιορισμένο γραπτό κείμενο.

Για να αναλύσουμε αυτή την κατάσταση θα διακρίνουμε τρία διαφορετικά πρότυπα Γεωμετρίας.

Τα τρία πρότυπα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Η Houdement και ο Kuzniak διακρίνουν τρία διαφορετικά πρότυπα στοιχειώδους γεωμετρίας, που έχουν διαφορετική σχέση με την εμπειρία, τη διαίσθηση και τον παραγωγικό συλλογισμό.

Αυτά δεν είναι ιεραρχικά δομημένα. Έχουν διαφορετικά πεδία αναφοράς και η επιλογή της προσέγγισης για την επίλυση ενός προβλήματος εξαρτάται από το πρόβλημα και από το πρότυπο που χρησιμοποιείται.

Η Φυσική Γεωμετρία

Το πρώτο πρότυπο, η “Φυσική Γεωμετρία”, αναφέρεται στον πρακτικό κόσμο και τις τεχνικές. Το μοντέλο της γεωμετρίας βασίζεται στον πραγματικό κόσμο των αισθήσεων.

Σε αυτή τη γεωμετρία η εγκυρότητα ενός ισχυρισμού βασίζεται στην παρατήρηση, το πείραμα και τα λογικά συμπεράσματα.

Οποιοδήποτε επιχείρημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υποστηρίξει έναν ισχυρισμό, συμπεριλαμβανομένων πειραματικών ή δυναμικών αποδείξεων.

Η Φυσική Γεωμετρία

Στη Φυσική Γεωμετρία η ανάγνωση του σχήματος είναι άμεση: Το συγκεκριμένο σχήμα είναι το αντικείμενο της μελέτης.

Η Φυσική Γεωμετρία αντιστοιχεί στη θεώρηση των μαθηματικών ως μία εργαλειοθήκη: Η γεωμετρία προσφέρει εργαλεία για την κατανόηση του σχήματος φυσικών αντικειμένων και την επίλυση καθημερινών προβλημάτων.

Η Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία

Το δεύτερο πρότυπο, η “Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία”, αντιστοιχεί στην κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Δομείται σε ένα μοντέλο που προσεγγίζει την πραγματικότητα χωρίς να ταυτίζεται με αυτήν.

Το σύστημα των αξιωμάτων στοχεύει να αναπαραστήσει ιδιότητες του φυσικού χώρου και μπορεί να μην είναι πλήρες.

Όμως οι αποδείξεις πρέπει να βασίζονται στο αξιωματικό σύστημα.

Στη Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία το σχήμα δεν είναι το ίδιο το αντικείμενο της μελέτης, αλλά υποστηρίζει την επιχειρηματολογία σχετικά με τα μαθηματικά αντικείμενα, τα οποία μπορεί να εμπνέονται από φυσικά αντικείμενα, αλλά προσδιορίζονται από τις ιδιότητές τους.

Η αξιωματική διαδικασία είναι δυναμική, και βασίζεται σε ένα μοντέλο του πραγματικού κόσμου.

Η Τυπική Αξιοματική Γεωμετρία

Το τρίτο πρότυπο είναι η Τυπική Αξιοματική Γεωμετρία.

Αυτή δεν εμφανίζεται στη σχολική ύλη, αλλά αποτελεί το σημείο αναφοράς όσων έχουν προχωρημένη μαθηματική παιδεία.

Το αξιωματικό σύστημα στο τρίτο πρότυπο δεν προσδιορίζεται από τη φυσική πραγματικότητα.

Στην Τυπική Αξιοματική Γεωμετρία το σχήμα αναπαριστά τις σχέσεις μεταξύ των θεωρητικών αντικειμένων, και έχει ευρετικό χαρακτήρα: διευκολύνει στη διατύπωση υποθέσεων, που πρέπει να τεκμηριωθούν με βάση τα αξιώματα.

Η σχέση με το χώρο έχει διαρραγεί, και η Ευκλείδεια Γεωμετρία βασίζεται στη Λογική.

Οι δύο σχολικές Γεωμετρίες

Τα πρότυπα της Φυσικής Γεωμετρίας και της Φυσικής Αξιωματικής Γεωμετρίας καλύπτουν τη Γεωμετρία του σχολείου.

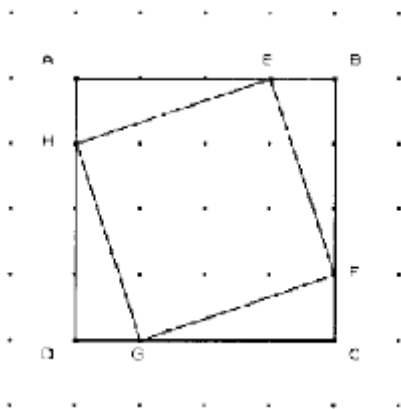
Αυτά τα δύο πρότυπα έχουν στενή σχέση με τον πραγματικό κόσμο, αλλά με διαφορετικό τρόπο.

Διαφέρουν στο τεκμήριο εγκυρότητας, δηλαδή στο είδος των επιχειρημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επαλήθευση μίας πρότασης.

Επίσης διαφέρουν στο χαρακτήρα των σχημάτων, που είναι μοναδικά και συγκεκριμένα στη Φυσική Γεωμετρία, ενώ είναι γενικά και προσδιορίζονται από τους ορισμούς στη Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία.

Η επίλυση ενός προβλήματος στις 3 Γεωμετρίες

Θα δούμε ότι τα τρία πρότυπα της Γεωμετρίας διαφέρουν στον τρόπο αντιμετώπισης προβλημάτων. Θεωρούμε το ακόλουθο σχήμα και θέλουμε να δείξουμε ότι $EFGH$ είναι τετράγωνο.



Οι υποθέσεις του προβλήματος στις 3 Γεωμετρίες

Στη Φυσική Γεωμετρία, οι υποθέσεις του προβλήματος είναι το πλέγμα σημείων στο χαρτί και τα επιλεγμένα σημεία, που βρίσκονται πάνω στο πλέγμα.

Στη Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία, και στην Τυπική Αξιοματική Γεωμετρία, πρέπει να διατυπωθούν συγκεκριμένα οι υποθέσεις, οι οποίες προσδιορίζουν το γενικό χαρακτήρα του σχήματος.

Για παράδειγμα, $ABCD$ είναι τετράγωνο, τα σημεία E, F, G, H βρίσκονται στις αντίστοιχες πλευρές AB, BC, CD, DA , και τα ευθύγραμμα τμήματα AE, BF, CG και DH έχουν το ίδιο μήκος.

Επίλυση του προβλήματος στη Φυσική Γεωμετρία

Μία απάντηση μπορεί να είναι απλά διαισθητική: *Βλέπω ότι είναι τετράγωνο, αφού έχει τέσσερις ίσες πλευρές και ορθές γωνίες.*

Μία πειραματική απάντηση: Ελέγχω τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων και τα μεγέθη των γωνιών, και διαπιστώνω ότι το σχήμα έχει τέσσερις ίσες πλευρές και ορθές γωνίες.

Μία απάντηση βασισμένη στο συνδυασμό της εμπειρίας με το συλλογισμό: Πειραματική επαλήθευση ότι $\angle AHE = \angle BEF$, και χρήση της προηγούμενης γνώσης, ότι εάν κόψουμε τις γωνίες ενός τριγώνου και τις ταιριάξουμε, σχηματίζουν δύο ορθές, για να συμπεράνω ότι $\angle EAH$ είναι ορθή.

Επίλυση του προβλήματος στη Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία

Εδώ η διαίσθηση μπορεί να έχει βοηθητικό χαρακτήρα. Αλλά ότι δεν αναφέρεται στις υποθέσεις, πρέπει να παραχθεί από αυτές. Μία απάντηση μπορεί να είναι:

Βλέπω ότι τα τρίγωνα AEH , BFE , CFG και DHG είναι ίσα.

Επιβεβαιώνω αυτή τη διαίσθηση: από τις υποθέσεις

$AE = BF = CG = DH$ και $EB = FC = GD = HA$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα συμπεραίνω ότι $HE = EF = FG = GH$ είναι επίσης ίσες.

Άρα οι γωνίες $\angle AEH$ και $\angle BEF$ είναι συμπληρωματικές, και η γωνία $\angle HEF$ είναι ορθή.

Συμπεραίνω ότι $EFGH$ είναι τετράγωνο, αφού έχει τέσσερις ίσες πλευρές και μία γωνία ορθή.

Επίλυση του προβλήματος στη Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία

Η διατύπωση των υποθέσεων που συμπληρώνουν το σχήμα, τοποθετεί το πρόβλημα στη Φυσική Αξιοματική Γεωμετρία. Αυτό όμως δεν γίνεται πάντα σαφές, και μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες.

Για παράδειγμα, σε μεικτές λύσεις, που βασίζονται εν μέρει σε μεθόδους της Φυσικής Γεωμετρίας (επαλήθευση με μέτρηση ή σύγκριση μηκών στο σχήμα) και εν μέρει της Φυσικής Αξιοματικής Γεωμετρίας (εξαγωγή συμπερασμάτων από Θεωρήματα).

Βιβλιογραφία

Le Séminaire de Royaumont, 1959 -1979. Math Ecole, 1979.

Houdement, C. Kuzniak, A., Un exemple de cadre conceptuel pour l' étude de l'enseignement de la Géométrie en formation des maîtres. Educational Studies in Mathematics, 40, 1999.

Kuzniak, A., Thinking about the Teaching of Geometry through the lens of Geometric Working Spaces. In *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*, eds Herbst et al. ICME-13 monographs, 2018.