ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών και
Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Ιούνιος 2021

ΠΜΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

Πρώτο Μέρος

Παρατηρήσεις

1. Το πρώτο μέρος της εξέτασης διαρκεί 120 λεπτά.
2. Δεν υπάρχει ελάχιστος αριθμός ερωτήσεων που πρέπει να απαντηθούν. Απαντήσετε όσο το δυνατόν περισσότερες ερωτήσεις στο διαθέσιμο χρόνο, προσπαθώντας να καλύψετε και τα 3 αντικείμενα.

Θεμέλια των Μαθηματικών

Ερώτηση 1 Αποδείξτε οτι, για κάθε ακέραιο αριθμό $n \geq 1$, ο αριθμός

$$\frac{2^{4n-2} + 3^{2n-1}}{7}$$

είναι ακέραιος.

Ερώτηση 2 Ένας θεατρικός παραγωγός πρόκειται να ανεβάσει ένα έργο με 9 διαφορετικούς ρόλους, 5 εκ των οποίων αφορούν γυναίκες και 4 άνδρες. Έχει τη δυνατότητα να επιλέξει από μια ομάδα 17 ηθοποιών που απαρτίζεται από 10 γυναίκες και 7 άνδρες. Με πόσους τρόπους μπορεί να διανείμει τους ρόλους σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Οποιοιδήποτε ηθοποιοί μπορούν να συμμετάσχουν.
β) Δύο συγκεκριμένοι ηθοποιοί, μία γυναίκα και ένας άνδρας, αρνούνται να παίξουν μαζί.
γ) Τρείς συγκεκριμένοι ηθοποιοί, δύο γυναίκες και ένας άνδρας, δέχονται να παίξουν μόνον όταν παίζουν όλοι μαζί.
(*Η απάντηση δεν χρειάζεται να είναι σε κλειστή μορφή, π.χ. μια απάντηση της μορφής* $9! \cdot 4! + 12 \cdot 5^7 + 1$ *είναι αποδεκτή. Δικαιολογήστε σύντομα την απάντησή σας, π.χ. αν η απάντηση είναι ένα άθροισμα, ο κάθε όρος του αθροίσματος σε τί αντιστοιχεί*).

Ερώτηση 3 Έστω $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ το σύνολο των μη-μηδενικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε στο σύνολο $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ διμελή σχέση $\sim$ ως εξής:

$$(a_1,b_1)\sim(a_2,b_2)\Longleftrightarrow a_1b_1(a_2^2-b_2^2)=a_2b_2(a_1^2-b_1^2).$$

α) Δείξτε ότι η παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας.
β) Περιγράψτε αλγεβρικά και γεωμετρικά (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$) την κλάση ισοδυναμίας του $(2,1)$.
γ) Περιγράψτε αλγεβρικά και γεωμετρικά (ως υποσύνολο του $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$) την κλάση ισοδυναμίας του $(a,b)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*$.

Απειροστικός Λογισμός

Ερώτηση 4 [Αποδείξτε πλήρως τους ισχυρισμούς σας.]
α) Αποδείξτε οτι το πολυώνυμο $f(x)=x^{81}-7x^7+9$ έχει το πολύ δύο θετικές πραγματικές ρίζες.
β) Μία συνεχής συνάρτηση f από το $[0,1]$ στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί $f(0)=3$ και παίρνει μόνο ρητές τιμές. Βρείτε την τιμή $f(\frac{1}{2})$.

Ερώτηση 5 Οι συνεταγμένες (x,y) ενός κινουμένου σημείου P ικανοποιούν τις εξισώσεις $\frac{dx}{dt}=x$ και $\frac{dy}{dt}=-x^2$, για $t\geq 0$. Με την υπόθεση οτι το κινούμενο σημείο P στο χρόνο $t=0$ περνά από το $(1,-4)$, να βρεθεί μία εξίσωση της μορφής $f(x,y)=0$ που ικανοποιούν οι συντεταγμένες του P.

Ερώτηση 6 α) Θεωρείστε μία συνάρτηση $y=f(x)$, συνεχή και αύξουσα στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Έστω $\mu=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Εξηγείστε, χρησιμοποιώντας σχήμα, το γιατί

$$[f(\alpha)+f(\mu)]\frac{\beta-\alpha}{2}\leq\int_\alpha^\beta f(x)\;dx\leq[f(\mu)+f(\beta)]\frac{\beta-\alpha}{2}\;.$$

β) Ένα κινητό κινείται στον άξονα των x, έτσι ώστε κατά τη χρονική στιγμή t βρίσκεται στο σημείο $g(t)$, οπου g μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Έστω οτι η ταχύτητά του κατά το χρόνο t είναι $f(t)$ οπου f είναι μία συνεχής συνάρτηση. Υποθέστε οτι γνωρίζουμε οτι, για δύο χρονικές στιγμές $t=a$ και $t=b$ ισχύει η σχέση $\int_a^b f(t)g(t)\;dt=6$. Υπολογίστε την ποσότητα $g^2(b)-g^2(a)$. Αιτιολογήστε πλήρως.

Ερώτηση 7 Σε μία εξέταση Απειροστικού Λογισμού ζητήθηκε να ελεγχθεί εάν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι σωστός:

Έστω $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ ακολουθίες. Αν $0\leq a_n\leq b_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $b_n\to b$ τότε $a_n\to b$.

Ένας φοιτητής έγραψε την ακόλουθη απόδειξη. Αν συμφωνείτε δηλώστε το. Εάν διαφωνείτε υπογραμμίστε κάθε φράση που θεωρείτε λανθασμένη και εξηγείστε με σαφήνεια γιατί.

> *Απόδειξη.* Επειδή $b_n\to b$, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $|b_n-b|<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Από την υπόθεση έχουμε ότι $|a_n-b|\leq|b_n-b|$. Άρα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ έτσι ώστε $|a_n-b|<\varepsilon$ για κάθε $n\geq n_0$. Άρα $a_n\to b$. Άρα ο ισχυρισμός είναι σωστός.

Αναλυτική Γεωμετρία

Ερώτηση 8 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C στο επίπεδο, τέτοια ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ ικανοποιούν τις σχέσεις $|\vec{w}| = 2|\vec{u}|$ και $(\vec{w} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$.

Υπολογίστε το a εάν $|\vec{u} + \vec{w}| = a|\vec{u}|$.

Βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{u}$ στον φορέα του διανύσματος $\vec{w}$.

Ερώτηση 9 Εάν $A : (1, 0, 0)$, $B : (0, 1, 0)$ και $C : (0, 0, 1)$, βρείτε ένα σημείο D τέτοιο ώστε $ABCD$ να είναι κανονικό τετράεδρο: οι τέσσερεις πλευρές BCD, CDA, DAB και ABC είναι ισόπλευρα τρίγωνα.

Βρείτε την απόσταση μεταξύ των ευθειών BC και AD.

Ερώτηση 10 α΄. Αν z είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, δείξτε οτι $z^{-1} = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $|z| = 1$.

β΄. Βρείτε όλους τους αριθμούς z για τους οποίους $z^2 = \bar{z}$.